¿Ya se sabe "todo" en matemática?

Es curioso, pero es tal la desconexión entre la sociedad y la matemática que la mayoría de la gente piensa (con razón, porque esos son los elementos con los que cuenta) que la matemática "está toda inventada" o que es algo "cuadrado" que uno va, estudia, y *no* aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas).

Sin embargo, no sólo *no* es así, sino que la matemática anda por la vida como la mayoría de las ciencias: sabiendo algunas cosas (pocas), e ignorando otras (muchas). El siguiente recorrido no pretende ser exhaustivo ni mucho menos original. Más aún: aparece en casi todos los "prólogos" de libros dedicados a la difusión de la matemática. Pero, si lo que usted llegó a cursar hasta completar (con suerte) fue el colegio secundario, lo invito a que reflexione sobre lo que va a leer (si es que no se aburrió ya).

Se trata de una historia que quiero empezar así: "Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aun aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a lo que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía ya hace cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan *aburridas e inexplicables.* Peor aún: de difícil aplicación".

Sin embargo, estoy convencido de que uno puede aspirar a más. Sígame en este recorrido apresurado sobre lo que pasó en los últimos siglos.

1) La matemática del siglo XVII produce un quiebre esencial: la aparición del cálculo, con el aporte casi simultáneo de dos científicos que se odiaron mientras vivieron. Me refiero al inglés Isaac Newton y al alemán Gottfried Leibniz. Más allá de las disputas personales, ambos coinventaron la noción de límite y, con ello, floreció el cálculo y/o el análisis. Esto significó el desarrollo de la física matemática, de la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y la naturaleza de la materia.

2) Luego Georg Cantor con su teoría sobre los conjuntos infinitos irrumpe sobre el final del siglo XIX y se prolonga hasta principios del siglo pasado, creando en algún sentido un paraíso para la investigación en matemática. Cantor terminó poco menos que loco y vilipendiado por una comunidad que no lo comprendió.

Aquí, una pausa: en general, en los programas de matemática de los colegios secundarios, las teorías de Newton-Leibniz, de Cantor, los aportes de Gauss, Fermat y Euler *no* se estudian. Ése es un pecado que necesitamos corregir. Y lo antes posible.

3) Con el advenimiento del siglo XX, justo en el año 1900, David Hilbert enuncia en París, en el marco del Congreso Internacional de Matemática, los 23 problemas más importantes de la matemática que aún no tenían solución.[1] Con esto desafió al mundo –matemático, obviamente– e invitó a la comunidad científica a "arremangarse" y tratar de producir resultados. Hilbert dijo: "Tenemos que saber y vamos a saber". Estas palabras son las que están escritas en su tumba en Gottingen.

4) Nuevas ramas, como la topología, nacieron de la geometría y del análisis, y dominaron la investigación en matemática

[1] Fueron los problemas más importantes para Hilbert. Algunos se resolvieron fácilmente al poco tiempo, y obviamente varios adquirieron celebridad por haber sido formulados por él en ese congreso.

durante muchísimo tiempo. Se produjo también la enfática irrupción de las "Probabilidades y estadísticas", muy ligadas a la teoría de conjuntos, las funciones que se llaman "medibles" y las "teorías de integración".

5) Los últimos dos matemáticos universalistas fueron Gauss y Poincaré. Es que hace un siglo era posible imaginar que un extraordinario matemático pudiera *manejar* todo lo que se sabía de su especialidad en el mundo. Pero eso hoy no puede pasar. Otra vez, no sólo es improbable, sino casi "imposible". La cantidad de matemáticos en el mundo se ha multiplicado por miles. Más aún: se publican también miles de revistas de variadas especialidades en más de 100 idiomas. El volumen del conocimiento ha llegado a límites para el asombro. Se estima que se producen más de 200.000 nuevas teoremas por año, lo cual significa unos 600 teoremas nuevos ¡por día!

6) El 24 de mayo del año 2000, en el College de Francia, en París, el Clay Mathematics Institute, que tiene su base en Cambridge, Massachusetts, hizo algo parecido a lo que produjo Hilbert cien años antes: eligió siete problemas sin solución aún y los llamó "Millenium Prize Problems" (los Premios a los problemas del milenio). La idea fue publicitar los problemas y ofrecer *un millón de dólares* a quien pudiera resolver alguno de ellos. Justamente, ésos son los problemas que hoy están en la *frontera* del conocimiento.

7) Hace muy poco, en agosto de 2006, el ruso Grigori Yakovlevich Perelman sorprendió al mundo cuando anunció que había resuelto la famosa "Conjetura de Poincaré". Perelman se negó a retirar su premio, sin embargo, la comunidad matemática le confirió la medalla Fields (equivalente al Premio Nobel). Perelman también se negó a retirar este premio y en la actualidad se encuentra recluido en su ciudad de origen, San Petersburgo, en Rusia.

¿Quién dijo que se sabía "todo"? El solo hecho de que "aceptemos" esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la "matemática real", la que investiga porque *no sabe*, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que *mostrar*, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar.

La matemática tiene sus problemas

Dos pintores y una pieza[2]

En una casa hay una habitación grande que hay que pintar. Un pintor, llamémoslo A, tarda 4 horas en pintarla solo. El otro, a quien llamaremos B, tarda 2 horas.

¿Cuánto tardarían si los dos se pusieran a pintarla juntos?

(Antes de avanzar: la respuesta no es 3 horas.)

¿Da lo mismo subir que bajar un 40%?

Algunas preguntas sobre porcentajes.

1. Si uno empieza con un número cualquiera, digamos 100, y le quita el 40%, y al resultado lo incrementa un 40%, ¿se llega otra vez a 100?
2. Al revés ahora: si uno empieza con el número 100, le agrega un 40%, y al resultado le descuenta ahora un 40%, ¿se llega otra vez a 100?
3. Las respuestas que dio para las dos preguntas anteriores, ¿dependieron de que empezara con el número 100, o hubiera dado lo mismo si empezaba con cualquier otro número?

[2] Las respuestas a los problemas las encontrará en el capítulo "Soluciones" (pp. 181-237).

4. Y las respuestas que dio para las dos primeras preguntas, ¿dependieron de que fuera un 40%, o hubiera dado lo mismo con cualquier otro porcentaje?
5. Si uno incrementa un número en el 100% y luego descuenta el 100%, ¿se tiene el mismo número con el que empezó? Y al revés, si uno descuenta el 100% y luego lo aumenta, ¿qué obtiene?

Problema de los seis fósforos

Se tienen seis fósforos iguales. ¿Es posible construir con ellos cuatro triángulos equiláteros cuyos lados sean iguales al largo del fósforo?

Nota 1: No conteste rápido si no se le ocurre la solución. Piense.

Nota 2: Triángulo equilátero quiere decir que tiene *los tres lados **iguales.*** De hecho, "equi" = "igual", "látero" = lado. En este caso, lados iguales y, además, de igual longitud que la del fósforo.

¿Cómo hacer para pesar *diez kilos* con una balanza desbalanceada?[3]

Mucha gente cree que tiene mala suerte y lo expresa de distintas maneras. Por ejemplo: "El día que llueva sopa, yo voy a estar con un tenedor en la mano". O algo equivalente. El hecho es que si Murphy viviera, diría que uno siempre tiene un destornillador cuando necesita un martillo (o al revés). Pero con el tiempo y con paciencia, al final, nos ingeniamos para salir del paso.

Es posible que usted *nunca* tenga que enfrentar el problema que viene a continuación. Sin embargo, estoy seguro de que, el haber pensado en cómo resolverlo, *lo ayudará* a tener una llave extra en su arsenal, que uno *nunca sabe* cuándo necesitará utilizar.

[3] Este problema fue publicado por A. K. Peters en 2004, en el libro *Puzzles 101*.

Supongamos que tiene que pesar *exactamente* diez kilos de azúcar. Para lograrlo, se tienen dos pesas de cinco kilos cada una, y una balanza con dos platillos.

La dificultad reside en que la balanza está *desbalanceada.* Esto significa que, sin que haya ningún peso en ninguno de los dos platillos, hay uno que está más arriba que el otro.

¿Cómo hacer?

Los tres recipientes con dos tipos de monedas que tienen las etiquetas cambiadas

Supongamos que tiene tres recipientes iguales que contienen monedas. Y no se puede ver lo que hay en el interior de cada uno.

Lo que sí se puede ver es que en la parte de *afuera* de cada recipiente hay pegada una etiqueta.

Una dice: "Monedas de 10 centavos".

Otra dice: "Monedas de 5 centavos".

Y la tercera dice: "Mezcla".

Un señor que pasó por el lugar antes que usted, despegó *todas* las etiquetas que había y las puso, a propósito, en recipientes que *no correspondían.* ¿Alcanza con elegir *una sola moneda de un solo recipiente* para tener suficiente información para reordenar las etiquetas y poner cada una en el lugar que le corresponde?

Las cuatro mujeres y el puente

El problema que sigue requiere de planificar una estrategia. No es difícil, pero tampoco trivial. Eso sí: no tiene trampas. Es un ejercicio muy conocido en el mundo de los que juegan a planificar e inventar caminos donde, en apariencia, no los hay. Y tiene el atractivo extra de que permite entrenar al cerebro. Acá va:

Hay cuatro mujeres que necesitan cruzar un puente. Las cuatro empiezan del mismo lado del puente. Sólo tienen 17 (diecisiete) minutos para llegar al otro lado. Es de noche y sólo tienen una linterna. No pueden cruzar más de dos de ellas al mismo tiempo, y cada vez que hay una (o dos) que cruzan el puente, necesitan llevar la linterna. Siempre.

La linterna tiene que ser transportada por cada grupo que cruza en cualquier dirección. No se puede "arrojar" de una costa hasta la otra. Eso sí: como las mujeres caminan a velocidades diferentes, cuando dos de ellas viajan juntas por el puente, lo hacen a la velocidad de la que va más lento.

Los datos que faltan son los siguientes:

Mujer 1: tarda 1 (un) minuto en cruzar
Mujer 2: tarda 2 (dos) minutos en cruzar
Mujer 3: tarda 5 (cinco) minutos en cruzar
Mujer 4: tarda 10 (diez) minutos en cruzar

Por ejemplo, si las mujeres 1 y 3 cruzaran de un lado al otro, tardarían 5 minutos en hacer el recorrido. Luego, si la mujer 3 retorna con la linterna, en total habrán usado 10 minutos en cubrir el trayecto.

Con estos elementos, ¿qué estrategia tienen que usar las mujeres para poder pasar todas –en 17 minutos–de un lado del río al otro?

Problema de las 10 monedas

Se tienen 10 monedas arriba de una mesa.

¿Es posible distribuirlas en cinco segmentos, de manera tal que queden *exactamente cuatro* en cada uno de ellos?

Si se puede, exhiba una forma de hacerlo. Si no se puede, explique por qué.

Cuatro interruptores

Hace un tiempo presenté un problema que involucra lo que se llama el "pensamiento lateral". Por las características que tenía, lo llamé "Problema de los tres interruptores". Obviamente no es algo que inventé (ni mucho menos), pero me pareció que, de todos los que conocía al respecto, *ése* era el más atractivo. De hecho, en varias charlas que tuve con grupos de jóvenes de distintas edades y también con gente dedicada a la docencia y divulgación de la matemática, recibí de parte de todos muy buenos comentarios.

Ahora quiero contar una anécdota e incorporar un grado de "dificultad" más al problema de los interruptores. El día que apareció en la contratapa del diario *Página/12* el problema de los tres interruptores, se me acercó Fernando Kornblit, un matemático argentino que trabaja en el INTI, y me dijo: "Adrián, muy interesante el problema de los interruptores, pero estuve pensando que *también tiene solución si en lugar de tres interruptores hubiera cuatro"*.

Le pedí que nos dejara pensar un rato, y eso es lo que le estoy proponiendo acá: que lo piense también. Sólo para refrescar las ideas, recuerdo el problema original que apareció publicado en *Matemática... ¿Estás ahí?* (Episodio 1):

> Se tiene una habitación vacía, salvo porque hay colgada desde el techo una bombita de luz. El interruptor que activa la luz se encuentra en la parte exterior de la pieza. Es más: no sólo hay un interruptor, sino que hay tres iguales, indistinguibles. Uno sabe que sólo una de las "llaves" activa la luz (y que la luz funciona, naturalmente).
> El problema consiste en lo siguiente: la puerta de la habitación está cerrada. Uno tiene el tiempo que quiera para "jugar" con los interruptores. Puede hacer cualquier combinación que quiera con ellos, pero puede entrar en la pieza sólo una vez. En el momento de salir, uno debe estar en condiciones de poder decir: "Ésta es la llave que activa la luz". Los tres interruptores son iguales y están los tres en la misma posición: la de "apagado".
> A los efectos de aclarar aún más: mientras la puerta está cerrada y uno está afuera, puede entretenerse con los interruptores tanto como quiera. Pero habrá un momento en que decidirá entrar en la pieza. No hay problema. Uno lo hace. Pero cuando sale, tiene que poder contestar la pregunta de cuál de los tres interruptores es el que activa la lamparita. Una vez más, el problema no esconde trampas. No es que se vea por debajo de la puerta, ni que haya una ventana que da al exterior y

que le permita ver qué es lo que pasa adentro, nada de eso. El problema se puede resolver sin golpes bajos.

Hasta acá, el problema conocido. El agregado entonces es: si en lugar de haber *tres* interruptores, hay *cuatro,* ¿se puede encontrar la solución también entrando en la pieza una sola vez?

Ahora, otra vez (afortunadamente) le toca a usted.

Problema de las ocho monedas

El siguiente problema invita, *una vez más,* a pensar un rato. Lo que puedo decir es que *hay una solución,* que *no es muy complicada,* pero que requiere de analizar y evaluar las distintas posibilidades. Y para eso hace falta un poco de concentración. Nada más. Nada menos. Acá va.

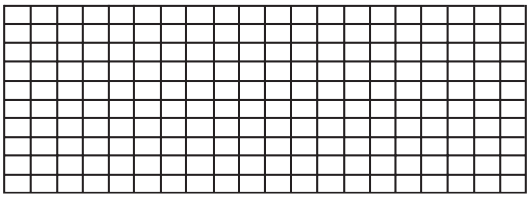
Se tienen ocho monedas en apariencia iguales, aunque se sabe que una de ellas es más liviana que las otras siete. Además, hay una balanza con dos platillos y lo único que se puede hacer con ellos es poner monedas a uno y otro lado, y pesar solamente *dos* veces Luego de esas dos pesadas, se supone que uno tiene que estar en condiciones de poder decir cuál es la moneda diferente (más liviana).

Problema de la barra de chocolate

Supongamos que le doy una barra de chocolate que tiene forma de rectángulo. Esta barra tiene divisiones: 10 a lo largo y 20 a lo ancho (como muestra la figura). Es decir, en total, si uno partiera la barra, tendría 200 (doscientos) trozos de chocolate iguales.

La pregunta es: ¿cuál es el número *mínimo* de divisiones que hay que hacer para obtener los 200 bloquecitos?

Detalle: no importa el orden, ni el tamaño. Sólo se pregunta cuál es la forma más eficiente de cortar el chocolate (se supone que uno corta por el lugar donde figuran las divisiones).



El problema en sí mismo parece irrelevante. De hecho, lo parece *porque lo es*. Pero lo que no resulta irrelevante es advertir que, en la búsqueda de la solución, uno tuvo que imaginar diferentes situaciones. Quizá no le sirvieron para este ejemplo en particular, pero son caminos por los que uno, o bien ya anduvo, o bien los acaba de generar en su cerebro. ¿Cómo sabemos, o mejor dicho, cómo sabe usted que no va a utilizar en algún momento algo de lo que acaba de pensar? Más aún: ¿cómo sabe que algo que *hoy* tuvo que descartar no le va a servir mañana para algo que *hoy* no puede imaginar? Tener este tipo de problemas permite entrenar el cerebro y estimular la imaginación. Nada más. Nada menos.

Un cambio en la rutina

El siguiente problema fue seleccionado por Martin Gardner[4] como uno de los que más le gustó por su sencillez y profundidad. Después de leerlo, y eventualmente resolverlo, quedarán algunas reflexiones, pero la más importante tendría que ser: ¿cuántas veces en la vida cotidiana creemos estar ante un problema que, o bien no tiene solución, o bien creemos que nos faltan datos para resolverlo?

[4] Vale la pena recordar que Martin Gardner nació en 1914 en Tulsa, Oklahoma, Estados Unidos, y es uno de los más prolíficos y brillantes escritores y difusores de la matemática creativa que conoció el siglo XX.Su actividad se prolonga aún hoy, a punto de cumplir los noventa y tres años. Las columnas que escribió durante veinticinco años en la revista *Scientific American* se transformaron en un clásico de la literatura dedicada a este campo. Es considerado por una abrumadora mayoría, el verdadero "gurú" de la especialidad.

Éste es un magnífico ejemplo para poner a prueba, *no* el ingenio (cuya definición me resulta muy resbaladiza), sino la capacidad para pensar *desde otro lugar*. Ahora, basta de generalidades. Acá va el planteo.

Un comerciante viaja a su trabajo todos los días usando el mismo tren, que sale de la misma estación y que tiene los mismos horarios, tanto de ida como de vuelta. Para colaborar con él, su mujer lo lleva a la mañana hasta la estación y luego lo pasa a buscar a las 5 de la tarde con su coche, de manera tal de ahorrarle un viaje en colectivo.

Para el problema, lo importante es que la mujer lo encuentra todos los días a la misma hora, a las 5 de la tarde, y juntos viajan a su casa.

Un día, el marido termina su trabajo más temprano y toma un viaje previo que lo deposita en la estación a las 4 de la tarde (en lugar de las 5, como es habitual). Como el día está muy lindo, en vez de llamar a la mujer para contarle lo que hizo, decide empezar a caminar por la calle que usa ella para ir a buscarlo. Se encuentran en el trayecto, como él había previsto. El marido se sube al auto y juntos vuelven a su domicilio, al que llegan 10 minutos antes que lo habitual.

Si uno supone la situación ideal (e irreal también) de que:

a) la mujer viaja siempre a la misma velocidad;
b) sale siempre a la misma hora de la casa para ir a buscar a su compañero;
c) el hombre se sube al auto en forma instantánea y sin perder tiempo;
d) nunca aparece nada extraño en el camino, ni semáforos que dilaten o aceleren el tránsito, etcétera.

¿Puede usted determinar cuánto tiempo caminó el marido cuando ella lo encontró?

Hasta aquí, el planteo. Un par de reflexiones antes de escribir la solución.

Como se da cuenta, el problema en sí mismo es una verdadera pavada. La belleza consiste en que no hay que utilizar ninguna herramienta sofisticada, ni ningún recurso extraordinario. Sólo hay que pensar, y para eso, usted decide cuándo y cómo lo hace. Lo único que le pido es que me crea que vale la pena.

Dicho esto, me queda un par de observaciones más. Luego de pensarlo un rato, uno empieza a sospechar que al problema le faltan datos. Por ejemplo, que falta saber:

a) la velocidad a la que caminaba el marido;
b) la velocidad a la que manejaba la mujer;
c) la distancia entre el domicilio y la estación.

Y seguramente habrá más cosas que usted pensó que me olvidé de poner aquí. No. No se necesita más nada. O sea, siga sola/o con lo que tiene, que es suficiente. La única concesión que me tiene que hacer es aceptar que las condiciones son ideales, en el sentido de que el hombre no pierde tiempo cuando sube al auto, que el auto gira en forma instantánea para ir de una dirección a la otra, que la mujer sale siempre a la misma hora para buscar al marido, etcétera.

Dos tías y dos colectivos

El ejercicio que sigue casi genera un problema familiar. De hecho, es antiintuitivo y, si uno no lo piensa bien, supone que hay algo que funciona muy mal o que hay trampa. Sin embargo, es una cuestión de lógica.

Un muchacho, llamémoslo Juan, vive sobre una avenida de doble mano. Juan tiene *dos* tías. Saliendo de su casa, una tía vive a la izquierda y la otra, hacia la derecha. Ambas viven bastante lejos: para ir a la casa de cualquiera de ellas Juan tiene que tomar un colectivo.

Juan quiere mucho a ambas tías, y las quiere por igual, y ellas a su vez quieren que él las vaya a visitar seguido. Por suerte (para Juan) hay dos líneas de colectivos que pasan justo por la casa de él y tienen paradas exactamente frente a su puerta. Sin embargo, las líneas van en direcciones contrarias. La línea *roja*, va hacia la derecha, mientras que la *azul*, hacia la izquierda.

Las dos líneas pasan por la casa de Juan *exactamente* cada 10 minutos. Nunca se atrasan. Siempre, cada 10 minutos un colectivo rojo y otro azul. Claro, los colectivos no tienen por qué pasar a la misma hora. Puede ser el caso de que el azul pase a la "hora en punto", a las "y 10", "y 20", "y 30", "y 40" e "y 50", mientras que el rojo pasa "a las y 5", "y 15", "y 25", "y 35", "y 45" e "y 55". Pero el hecho es que los colectivos *nunca* llegan fuera de hora.

Con esta distribución de los colectivos Juan quiere ser equitativo con sus tías y les propone lo siguiente:

–Hagamos una cosa –les dice–. Cuando yo vaya a visitar a alguna de ustedes, voy a salir a la calle y esperar el primer colectivo que venga. Si es rojo, lo tomo y visito a la que vive a la derecha, y si es azul, visito a la otra tía.

Las tías escuchan atentas, y hasta aquí no ven nada raro ni les parece mal la propuesta. Juan agrega:

–Eso sí. No voy a salir a esperar el colectivo siempre a la misma hora. Voy a salir a una hora aleatoria (o sea, a cualquier hora que me venga bien) y tomo el primer colectivo que pase.

Las tías asintieron, demostrando su conformidad con el acuerdo.

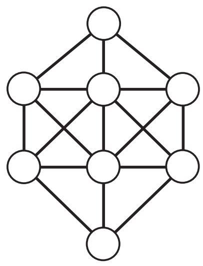
Sin embargo, con el paso del tiempo, Juan visitaba mucho más a una tía que a la otra. Ante el reclamo de la tía menos visitada, Juan aseguró enfáticamente que él cumplía con lo pactado.

El problema consiste en explicar por qué sucede esto, sin suponer que hay alguna trampa, del estilo "Juan no podía cruzar la calle cuando venía el colectivo que iba para…", o "Juan mintió y cuando viene el colectivo azul lo deja pasar y espera el rojo", o "Juan no cumple con su palabra y sale siempre a la misma hora". No. No hay trampas, no hay trucos. Es sencillamente un problema que se resuelve usando un poco de lógica. Y un papel, lapicera en mano y tiempo.[5]

[5] Este problema me lo envió Maxi Combina, estudiante de Ciencias de la Computación en la Universidad Nacional de Córdoba. Luego de acordar con él, me tomé la libertad de hacerle algunas modificaciones (pequeñas, por cierto) y agregarle la solución que figura más arriba.

Ocho números conectados

Se tiene el siguiente dibujo:



El objetivo del problema es distribuir los primeros ocho números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) en los círculos indicados en el dibujo, de manera tal de que no haya ningún par de números *consecutivos* unidos por un segmento. ¿Se podrá? ¿O no?

Muchas veces en la vida cotidiana uno tiene un problema pero *no sabe* si tiene solución. Lo que tiene, entonces, es *un* problema para resolver, pero además, y mucho más importante, uno no sabe si el problema tiene solución. Lo cual representa otro problema.

Es muy común en los colegios que a uno le planteen un problema, pero *le advierten* que *tiene solución, o se infiere del contexto.* Ningún profesor o maestro pone en una prueba ejercicios para resolver cuya solución no conozcan. Muy diferente... *muy diferente...* es no saber si cuando uno busca y no encuentra es porque no existe o porque intentó mal, o no tuvo suerte, o eligió el camino equivocado.

La tentación que tengo es, entonces, plantear el problema de arriba y preguntar si tiene solución o no. Claro, en caso de que alguien diga que no tiene solución, tendrá que *demostrarlo*. Es decir, no alcanzará con que diga que intentó mucho tiempo y no la encontró. Eso no prueba nada. O en todo caso, sí. Prueba que usted intentó mucho. Pero nada más. Podría venir otra persona y resolverlo. En cambio, si usted pudiera *probar* que el problema no tiene solución, entonces será indistinto el tiempo que uno le dedique, o la persona de que se trate. No existiría solución y, por lo tanto, no se la podría encontrar.

Por otro lado, si uno dice que *tiene solución,* debería poder exhibirla. O, en todo caso, *demostrar* que sabemos que tiene solución ofreciendo argumentos.

Lo dejo (por un rato) con la pregunta. Y me llevo la respuesta para el final.

Problemas de Fermi

Se llaman así los problemas que involucran alguna *estimación* para poder llegar a la respuesta. Deben su nombre a Enrico Fermi, premio Nobel de Física.[6] No se pretende que uno conteste *con exactitud,* ni con *precisión extrema.* Se trata de *estimar un número.* Hay muchos ejemplos muy conocidos y sólo elijo uno entre ellos: ¿cuántos afinadores de piano hay en la ciudad de Boston?

Obviamente, nadie aspira a que, frente a esta pregunta, el interlocutor conteste con un número *exacto.* Sin embargo, *sí* se pretende que quien responda no diga 50 si son 10 mil, pero tampoco que diga 10 mil sin son 50. Se trata entonces, por un lado, de *estimar* una respuesta, pero aún más importante, *el proceso* que involucra.

El ejemplo que me ocupa acá es el siguiente. Supongamos que se va a jugar un partido de fútbol en la cancha de River (por elegir un estadio grande, pero el ejemplo se puede adaptar a cualquier país o a cualquier ciudad o cualquier equipo). Supongamos además que el estadio va a estar *repleto* de gente. Si uno trajera suficien-

[6] Enrico Fermi fue un físico italiano que vivió entre 1901 y 1954. Sus contribuciones más importantes fueron a la física nuclear y la teoría cuántica: le entregaron el Premio Nobel de Física por su contribución al desarrollo de la energía nuclear. Sin embargo, ni bien recibió el premio, Fermi fue forzado a dejar Italia y se convirtió en un activo investigador en la Universidad de Chicago.

Actualmente, uno de los laboratorios de física más importantes del mundo lleva el nombre de Fermi Lab (cerca de Chicago).

Fermi fue miembro del equipo que se conoció con el nombre de Proyecto Manhattan, y que desarrolló la bomba atómica en Los Álamos, Nuevo México.

tes pelotas de fútbol (infladas) y las distribuyera por el campo de juego (sin encimarlas) hasta ocuparlo por completo, ¿alcanzarán para que al finalizar el partido se le pueda entregar una pelota a cada espectador?

Una vez planteado el problema, lo dejo para que consiga los datos que le hagan falta, ya sean las *dimensiones* de una pelota así como las de una cancha de fútbol. Pero, más allá de los datos que le pudieran faltar, no se olvide de que se trata de una estimación.

Algo más antes de pensar el problema: ¿se anima a dar una respuesta *aun antes* de hacer ninguna cuenta? ¿Qué le parece que va a pasar? ¿Alcanzarán o no?

Otro problema de Fermi

Con la misma idea de las pelotas en una cancha de fútbol, supongamos ahora que ponemos cada pelota dentro de una caja cúbica (en donde entra casi exactamente una pelota), y luego ubicamos estas cajas en un camión, de manera tal que cada camión puede transportar 20 contenedores de un metro cúbico cada uno. ¿Cuántos camiones hacen falta para transportar todas las pelotas?

Como antes, se trata de una estimación. No se pretende una respuesta perfecta.

* * *

Las preguntas que uno puede *formularse* con la idea de *entrenarse* son muchísimas y, por supuesto, dependerá de la creatividad de cada uno para cuestionar o de la habilidad para buscar en internet o en los libros sobre el tema.[7] Propongo aquí algunas:

[7] Algunas fuentes consultadas son: http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm#General; http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/sheila3.html; http://www.soinc.org/events/fermiq/fermiguide.htm; http://www.vendian.org/envelope/dir0/fermi_questions.html; http://www.physics.odu.edu/~weinstei/wag.html

1) Si usted pusiera billetes de *2 pesos* en una columna, hasta que pudiera alcanzar la *deuda externa argentina,* ¿cuán alta le parece que sería esa *pila* de billetes? ¿Cuánto le parece que pesaría? ¿Cuál sería la presión sobre el piso en el que se apoya?
2) ¿Cuántos pelos tiene usted en la cabeza? ¿A qué velocidad cree que crece el cabello en un humano? ¿Cuántas células le parece que tiene nuestro organismo?
3) ¿Cuántos cuadros cree que tiene un *dibujito animado* de Walt Disney?
4) ¿Cuántos kilómetros habrá de carreteras en la Argentina? ¿Cuál será el volumen de todos los lagos?

Problema de la montaña

El siguiente problema es ciertamente fascinante. Si uno lo quiere abordar en forma directa, creo que se enfrentará con múltiples complicaciones. En cambio, si puede ingeniárselas para pensarlo desde otros ángulos, es un problema no sólo sencillo sino verdaderamente fácil.

Aquí va: una persona está al pie de una montaña. La montaña tiene un solo camino hacia la cumbre. El señor decide escalarla y sale a las cero hora del día lunes (o sea, a la medianoche del domingo). No importa la velocidad a la que asciende ni lo que hace en el trayecto (incluso puede parar o bajar, si quiere), pero lo que se sabe es que 24 horas más tarde el señor estará en la cumbre. O sea, a la medianoche del lunes *seguro* que llegó a lo más alto.

Ahora bien: una vez arriba, se queda un tiempo allí (no importa cuánto), digamos seis días, y exactamente a la medianoche del siguiente domingo, o sea las cero hora del lunes, comienza el descenso. Igual que antes, no importa de qué forma camina hacia abajo (por la única ruta que existe) y, como la semana anterior, si para para descansar, o subir un poco… En definitiva, es libre de hacer lo que quiera. Pero, lo que sí se sabe, una vez más, es que a la medianoche del lunes, 24 horas más tarde, ya estará abajo.

El problema consiste en lo siguiente: probar que existe al menos un lugar en donde el hombre estuvo a la misma hora, tanto al subir como al bajar.

Lo planteo de otra forma. Convénzase de que no importa cómo haya hecho para subir o para bajar, tiene que haber al menos un lugar en el camino que une la base con la cima, por la que el señor pasó en el mismo horario tanto a la ida como a la vuelta.

Por ejemplo, si el señor recorriera la mitad del trayecto en 12 horas, eso significaría que a las 12 del mediodía estará en el mismo lugar al subir que al bajar. Obviamente, esto es solo un ejemplo, ya que como el hombre tiene total libertad para la ida como para la vuelta, no tiene por qué recorrer la mitad del trayecto en 12 horas.

Ocho reinas

El problema de las *ocho reinas* consiste en saber si es posible ubicar en un tablero de ajedrez ocho reinas (no importa el color, naturalmente), de manera tal que ninguna de ellas pueda atacar a las restantes.

Una reina, en el ajedrez, gobierna lo que sucede en la fila y la columna en las que está ubicada, además de las diagonales.

Algunas de las preguntas que surgen son:

a) ¿Es posible encontrar una configuración de manera tal que *ninguna pueda "atacar" a ninguna?*
b) Si existe tal configuración, ¿cuántas hay?
c) ¿Hay algún método para construir configuraciones?

Este problema fue planteado originariamente a fines del siglo XIX por Max Bezzel, un ajedrecista de la época, y fue *abordado por muchísimos matemáticos,* entre otros, por Gauss, Gunther y Glaisher. Antes de avanzar, lo invito a que piense sola/o si tiene o no solución.

Pero más aún. Supongamos por un momento que usted es capaz de encontrar alguna. ¿Qué sucedería si rota el tablero 90 grados?

(Piense la respuesta). Sigo yo: ¿no estaría encontrando una nueva solución? Ahora que le sugerí que se podía rotar 90 grados, ¿qué otros movimientos podría hacer para obtener otros resultados? Por supuesto, rotar 90 grados es uno de ellos, pero rotar 180 y 270, también. Y no termina ahí. Supongamos que usted hiciera reflejar en un espejo una solución, ¿no encontraría otra? ¿Será alguna de las anteriores? ¿Y si rota la nueva que obtiene así? ¿Cuántos resultados esencialmente distintos se encontrarán con ese mecanismo?

A todas estas operaciones (rotaciones y reflexiones), los matemáticos las llamamos operaciones de simetría. En definitiva, es razonable pensar que, si uno tiene dos soluciones pero puede llegar empezando en una y, luego de rotar y/o reflejar, llegar a la otra, entonces se trata –en esencia– de la misma solución.

Vuelvo a las preguntas iniciales: ¿cuántas soluciones posibles hay, genuinamente diferentes?[8]

El cronómetro y las infinitas monedas

La mejor manera de desafiar la intuición, provocar al cerebro, entrar en conflicto con la lógica, es plantear un problema que involucre al *infinito.* O mejor dicho, que involucre a conjuntos infinitos. Al mismo tiempo, estos casos suelen activar una catarata de respuestas contradictorias, de debates internos que muestran, una vez más, la riqueza de nuestro intelecto, al que no siempre aprovechamos ni entrenamos.

Le propongo, entonces, pensar lo siguiente: supongamos que

[8] Una vez resuelto este problema, es interesante notar que uno puede *generalizar este hecho* y *ampliar y/o disminuir el número de reinas,* así como *ampliar y/o disminuir el correspondiente tablero.* Es decir, puede tomar un tablero de 14 x 14 y el problema se transforma en ubicar 14 reinas que no se puedan *atacar.* O hacer lo mismo con un tablero de 4 x 4, con *cuatro reinas.*

Hay numerosa literatura escrita para este problema. En internet, hay algunos sitios atractivos: http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle; http://bridges.canterbury.ac.nz/features/eight.html

Por otro lado, uno puede plantear *otros problemas relacionados con éste.* Por ejemplo, en un tablero de 8 x 8, ¿cuántos caballos o alfiles o reyes se pueden poner?

usted tiene *infinitas monedas.* (Sí, ya sé: infinitas monedas NO HAY, pero éste es un problema que requiere "estirar" la imaginación hasta ese lugar... ¿se anima?) Supongamos que en una habitación está usted con un amigo y que entre los dos tienen *infinitas monedas*. Como las monedas son todas iguales (digamos de 1 peso), ustedes les pusieron un "número" a cada una y las ordenaron en forma creciente (o sea, primero la número 1, luego la 2, la 3, etc.). Además, en la habitación hay:

a) una caja enorme (en donde uno de ustedes va a empezar a colocarlas), y
b) un cronómetro.

El proceso que va a empezar ahora es el siguiente: yo hago arrancar el cronómetro, que empieza en la posición 0 y dará una vuelta hasta llegar a cubrir 60 segundos (1 minuto). Usted tiene 30 segundos para colocar en la caja las monedas numeradas del 1 al 10. Una vez hecho esto, su amigo retira la moneda que lleva el número 1. Ahora, les quedan sólo 30 segundos en el reloj y nos empezamos a apurar. En la mitad del tiempo que les queda, o sea, en los siguientes 15 segundos, usted coloca en la caja las monedas del 11 al 20 y, rápidamente, su amigo retira de la caja la moneda que lleva el número 2. Ahora quedan 15 segundos antes de que se cumpla el minuto. En la mitad de ese tiempo (o sea, 7 segundos y medio), usted tiene que colocar en la caja las monedas numeradas del 21 al 30, y su amigo retirará de la caja la moneda número 3.

Y así continúa el proceso indefinidamente: usted usa la mitad del tiempo que queda hasta completar el minuto para ir colocando diez monedas por vez en la caja, y su amigo va retirando (en forma ordenada) una por vez. Por ejemplo, y para ratificar que entendimos el proceso, en el próximo paso, en la mitad del tiempo que queda (3 segundos y tres cuarto) usted coloca en la caja las monedas numeradas del 31 al 40 y su amigo retira la moneda número 4.

Creo que se entiende el procedimiento. En cada paso, usamos la mitad del tiempo que nos queda para ir colocando, sucesivamente –y en forma *ordenada*–, 10 monedas y sacando también en forma consecutiva la moneda con el número más chico. Obviamente, a medida que va avanzando el cronómetro y se va acercando a cumplir con el minuto pautado, tenemos que apurarnos cada vez más. La idea es ir reduciendo el tiempo a la mitad para colocar 10 monedas y retirar 1.

La pregunta que tengo para hacer es la siguiente: una vez terminado el tiempo (o sea, cuando expiraron los 60 segundos), ¿cuántas monedas hay en la caja?

Las hormigas y Alicia[9]

En una barra de un metro de longitud hay 100 hormigas *anónimas* (en el sentido de que son indistinguibles unas de otras). Además, hay una hormiga diferente, que llamamos Alicia. Ella es la hormiga número 101 del problema. Para distinguirla aún más, Alicia está parada exactamente en la mitad de la barra. Todas las hormigas caminan a la misma velocidad: *un metro por minuto* (incluida Alicia). Algunas caminan para un lado y otras, para el otro. Pero la regla que siguen es la siguiente: cuando dos hormigas chocan, ambas dan la vuelta y salen caminando en el sentido contrario al que traían.

Por supuesto, antes de plantear un par de preguntas posibles, me adelanto a decir que todo es ficticio y que haremos de cuenta que las hormigas no tienen espesor y que cada una ocupa un solo punto de la barra sobre la que está caminando. Es decir, son condiciones ideales.

Inicialmente, todas las hormigas están quietas, pero van a salir caminando en *alguna* dirección, *todas* al mismo tiempo.

Hechas estas observaciones, paso a formular las preguntas:

a) Si en los bordes de la barra no hay nada que las detenga, es decir que cada vez que una de las hormigas llega a cualquie-

[9] Estos problemas me los contó Matías Graña, profesor del Departamento de Matemática de Exactas (UBA), quien es además amigo personal.

ra de los bordes se cae, entonces: ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir, desde el momento en que empiezan a caminar, para estar *seguros de* que se cayeron todas?

b) Si, en cambio, en cada uno de los bordes del palo hay una madera, de manera tal que, cada vez que una hormiga *choca* contra esa pared, da la vuelta y camina en la dirección contraria, ¿es posible hacer una distribución de las 100 hormigas restantes para garantizar que Alicia, que empieza en el medio de la barra, al cabo de un minuto *termina otra vez en el medio* de la barra?

c) Pregunta *extra:* ¿cuántas distribuciones posibles se pueden encontrar de las 100 hormigas para que Alicia termine, después del minuto, otra vez en el medio de la barra?

Dos preguntas (en una)

PREGUNTA 1

Supongamos que usted tiene un tablero de ajedrez, el clásico de 8 x 8 cuadraditos. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar usando los lados de esos cuadrados?

Por ejemplo, un cuadrado a considerar es *todo el tablero,* que es el único que hay de 8 x 8. Pero hay otros… La pregunta es cuántos.

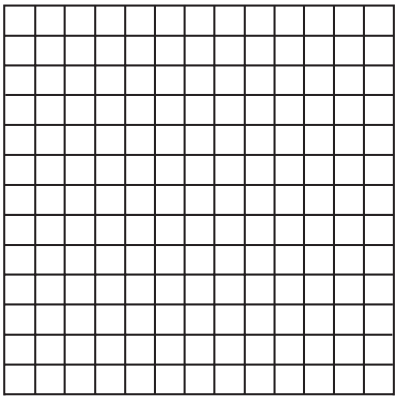
PREGUNTA 2

Ahora, enfrentemos el caso más general. Si en lugar de considerar un tablero de ajedrez de 8 x 8, tuviéramos un tablero *cuadrado* de *n x n*, donde *n* es un número natural cualquiera. En este caso: ¿cuántos cuadrados se podrían construir?

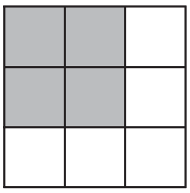
El acolchado cuadrado

Este problema fue propuesto por Henry Dudeney en 1917.

Vamos a suponer que tiene un acolchado que forma un *cuadrado* y que está compuesto por 169 cuadraditos (figura 1).



Uno podría pensar este acolchado como un *gran cuadrado de 13 x 13.* O también, como un acolchado compuesto por 169 “cuadraditos”. Pero el objetivo es encontrar la menor cantidad de *cuadrados* posibles en los que se pueda partir el cuadrado grande (es decir, de tamaño estrictamente menor que 13 x 13), y exhibir las formas en las que se puede armar nuevamente. Por ejemplo: supongamos que uno tiene un cuadrado de 3 x 3. Por supuesto, podría *partirlo* en cuadraditos de 1 x 1 y tendría *nueve* de esos cuadrados. Pero esa partición es mala, en el sentido de que uno puede encontrar una mejor. Por ejemplo, tomar un cuadrado de 2 x 2 y luego *cinco* cuadraditos de 1 x 1 (como se ve en la figura 2). Eso da un total de *seis* cuadraditos.



Vuelvo al problema original: el objetivo es encontrar el mínimo número de cuadrados en los que se pueda partir el acolchado grande de 13 x 13. Obviamente, se excluye el caso 13 x 13, ya que, si no, habría uno solo: ¡el original! Piénselo y luego, en todo caso, verifique qué solución encontró. Si me permite, le hago una sugerencia: empiece como hice yo, con acolchados de 3 x 3 (hasta que se convenza bien del ejemplo), luego siga con acolchados de 4 x 4, de 5 x 5, etc., hasta que desarrolle una intuición de qué es lo que habría que hacer. No empiece directamente con el de 13 x 13, porque es más complicado.

¿Siempre hay puntos "antipodales" en la Tierra que tienen la misma temperatura?

Desafío: yo le aseguro que siempre hay dos puntos en el planeta (Tierra) ubicados exactamente en las antípodas, en donde la temperatura *es exactamente igual*. ¿Cómo se puede demostrar esto?

Como siempre, la idea es que piense por su cuenta y trate de plantearse el problema primero; leerlo, meditar sobre él, reflexionar sobre si se entiende o no, y luego, pensar en alguna potencial solución. Ah, y no encontrarla no significa nada, como tampoco significa nada encontrarla. Eso sí: todo el recorrido sí significa… y mucho.

DEMOSTRACIÓN

Le propongo que construyamos juntos dos puntos *antipodales,* es decir, dos puntos que estén en lados opuestos de la Tierra (si bien quizás escuchó que Buenos Aires y Tokio son antipodales, en realidad, si uno se fija en un mapa, se va a dar cuenta de que no es exactamente así). No importa. Lo que quiero es que nos pongamos de acuerdo sobre cómo construir dos puntos que *sí* estén en las antípodas.

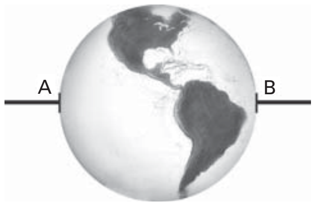
Supongamos que usted está mirando la Tierra, y "ve" los paralelos y los meridianos. Fíjese en el "ecuador" (o sea, el *más grande* de todos los paralelos).[10] Tome un punto cualquiera allí. Imagine que

[10] En realidad, sirve cualquier *círculo máximo.* Imagine a la Tierra como si fuera una pelota de tenis. Téngala en la mano, haciéndole una marca en el "equivalente" del polo norte y otra en el que sería, imaginariamente, el polo sur. Si ahora coloca una banda elástica o un piolín que enrolle a la pelota de tenis y que pase por esas dos mar-

lo pincha con un palito que atraviesa la Tierra en forma horizontal (suponiendo que está sosteniendo la esfera con el polo norte "arriba" y el polo sur "abajo"), y lo hace aparecer del otro lado. Allí, al salir, vuelve a encontrar otro punto del ecuador. Ese otro punto, está justamente en las antípodas (también llamados puntos antipodales).

(Como se advierte hay, además, una cantidad *infinita* de pares antipodales. Es decir, para cada punto que elija sobre el ecuador, del "otro lado" existe el punto antipodal al que eligió.)

Voy a llamar a esos dos puntos A y B:



¿Qué podría pasar con respecto a las temperaturas en ambos puntos? Si en esos dos lugares la temperatura fuera igual, o sea, si

$$A = B$$

Listo, se terminó el problema: hemos encontrado los puntos que buscábamos.

Ahora, supongamos que no fuera así. Es decir, la temperatura en los dos puntos no es la misma. Entonces, en uno de los dos la temperatura es mayor. Digamos que en A es mayor que en B (o sea, que en A hace más calor que en B), y lo denomino así:

$$A > B$$

cas, eso es un círculo máximo. Claro, usted puede hacer *girar* la pelotita, y tomarla de otra forma. Entonces, habrá dos *nuevos polos norte y sur.* Como se ve, habrá nuevos *círculos máximos* que son los círculos que pasan por esas dos nuevas marcas. En definitiva, lo que se observa es que hay infinitos círculos máximos, y son aquellos que sirven para *envolver* a la Tierra (o a la pelotita de tenis) pero que tienen la *mayor longitud posible.* Ésos son los círculos máximos.

Esto también puede expresarse de otra forma, diciendo que la diferencia de temperaturas entre ambos puntos es positiva. Es decir que, si uno resta la temperatura de los dos lugares, obtiene un número positivo.

$$(A - B) > 0$$

Para fijar las ideas (aunque no sea necesario), supongamos que en A hay 35 grados de temperatura y en B, 20.Entonces la diferencia de temperaturas entre ambos puntos es de 15 grados (35 – 20 = 15).

¿Qué estará pasando al mismo tiempo en los otros puntos antipodales que están sobre el ecuador? Quiero probar que hay al menos un par de puntos antipodales que en ese momento tienen la misma temperatura.

Imaginariamente, supongamos que uno hace girar el palito que tiene en una punta a A y en la otra a B. Le recuerdo que el palito pasa siempre por el centro de la Tierra, y tiene las dos puntas apoyadas en el ecuador. Ahora, volvamos a pensar en la diferencia de las temperaturas entre los dos puntos finales del “palito”. ¿Qué puede pasar con esa diferencia de temperatura entre esos dos puntos? Sabemos que $(A - B) > 0$ (en realidad, en el ejemplo que estábamos considerando la diferencia de temperaturas era de 15 grados). Al movernos y estudiar los cambios de temperatura en los extremos del palito, la diferencia puede seguir siendo positiva, o puede pasar a ser negativa, o incluso puede valer cero.

Analicemos cada caso.

a) Si al detenernos en otro par de puntos (ambos antipodales) la diferencia es cero, entonces allí hemos encontrado lo que queríamos: las temperaturas en ambos puntos *es la misma*.
b) Ahora lo invito a pensar conmigo. Si cuando nos detenemos la diferencia entre las temperaturas de los dos puntos dejó de ser positiva y pasó a ser negativa, eso significa que en algún momento del proceso... ¡tuvo que haber pasado por cero! Y eso

es lo que queremos. En ese instante hemos encontrado los dos puntos antipodales con temperaturas iguales.[11]

c) ¿Puede ser que siempre se mantenga la diferencia de temperaturas positiva? No, la respuesta es no, ya que si diéramos una vuelta de 180 grados con el palito, y llegáramos con el punto A hasta el B (y a su vez, el B llegara a ser A), esa diferencia ahora tendría que cambiar, y pasaría a ser negativa (en el ejemplo que elegí, la diferencia es de 15 grados). Luego, en algún momento, esa diferencia *tuvo que haber sido nula*. Y eso es lo que buscamos.

Eso demuestra que inexorablemente siempre hay sobre la Tierra dos puntos antipodales en donde la temperatura es la misma. Y para eso, hace falta usar matemática. De hecho, el teorema que se usa se conoce con el nombre de Teorema del valor intermedio para funciones continuas, y la temperatura *es* una función continua.

Ramo de rosas de distintos colores

Veamos ahora dos tipos diferentes de problemas con los que uno se encuentra en la matemática.

Una categoría de problemas la conforman aquellos de los cuales uno sabe (de alguna forma) que tienen solución, y el objetivo es tratar de encontrarla.

Otra categoría –muy diferente– la integran aquellos de los cuales uno *ignora* si tienen solución o no. Por supuesto, el problema se

[11] Piense que la temperatura varía *continuamente al movernos*. Por ejemplo: si usted está parado en la puerta de su casa y allí la temperatura es de 20 grados, y su hermana, que vive a 10 cuadras, está también parada en la puerta de la casa de ella, pero allí la temperatura es de 18 grados, entonces, en algún lugar entre su casa y la de su hermana la temperatura tiene que ser de 19 grados, y 19 y medio también. Y 18 grados 3 décimas también. (¿Entiende por qué?) Es decir, la temperatura no puede *saltar* de un lugar a otro. Al ir caminando, la temperatura irá variando y para pasar de 20 a 18, tendrá que recorrer todas las posibles temperaturas intermedias. Esto es lo que quise decir cuando escribí que la temperatura varía continuamente, o sea, no pega saltos.

resuelve, o bien mostrando que la “supuesta” solución no puede existir, o bien demostrando que existe y, eventualmente, encontrándola. Una cosa es tropezarse con un problema *sabiendo* que *tiene* una solución (la dificultad reside en que uno sea capaz de encontrarla) y otra muy distinta tener un problema adelante *y* no saber si se puede resolver siquiera. La vida cotidiana, justamente, está repleta de estas últimas situaciones. En general, las primeras aparecen en los momentos en los que uno estudia o se entrena, pero cuando aparece un problema en la vida real, por lo general no viene con un aviso de que la solución existe. De ahí que la aventura del descubrimiento sea tan apasionante.

Veamos un ejemplo:

Un florista le entregó a un señor un ramo de flores que consistía de *rosas* de distintos colores: *rojas, azules y blancas.* Pasó un par de días y el señor, como no había pagado, volvió al local y preguntó cuánto debía, teniendo en cuenta que cada color de rosa tenía un precio diferente.

El florista había perdido el papel en donde había anotado todos los datos, pero recordaba algunos. En principio, sabía que había puesto al menos dos rosas de cada color. Y además, podía afirmar que:

a) Había *100 rosas* si uno sumaba las *rojas* y las *blancas;*
b) había *53 rosas* si uno sumaba las *blancas* y las *azules,* y (*)
c) si uno sumaba las *azules* y las *rojas, había estrictamente menos que 53 flores.*

¿Es posible con estos datos decidir *cuántas flores había de cada color*?

La respuesta la va a encontrar en el apartado de las soluciones, pero quiero hacer antes una observación. Obviamente, éste no es un ejemplo de la vida cotidiana. No se me escapa que, si un florista pierde un papel en donde tenía anotado las particularidades del ramo, es muy poco probable que recuerde datos, como pasa en este caso… Pero vale la pena pensarlo porque uno, al final, se acostumbra a recorrer ciertos caminos, y cuando los necesita porque aparecen en alguna otra situación de la vida, sabe que tiene *el recurso de usar esta herramienta tan potente,* como es la de poder *pensar.* Y de eso se trata.