Los números de la matemática

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un hacedor de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de ellos, es porque están hechos con ideas. Un pintor crea patrones con sus formas y colores, un poeta, con palabras... Un matemático, por otro lado (a diferencia del poeta), no tiene material para trabajar salvo con sus ideas, y sus patrones suelen durar mucho más, ya que las ideas se gastan menos que las palabras.

G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (1940)

Algunas curiosidades matemáticas y cómo explicarlas (cuando se puede)

Si uno multiplica 111.111.111 por sí mismo, es decir, si lo eleva al cuadrado, se obtiene el número:

12.345.678.987.654.321

En realidad, es esperable que esto pase porque si uno piensa cómo hace para multiplicar dos números (y lo invito a que lo haga), advierte que multiplica cada dígito del segundo por *todos los dígitos* del primero, y los corre hacia la izquierda a medida que avanza.

Como los dígitos del segundo son todos números *1*, lo que hace es *repetir el primer número una y otra vez*, aunque corriéndolo a la izquierda en cada oportunidad. Por eso, al sumarlos, encolumnados de esa forma, se obtiene el resultado de más arriba:

12.345.678.987.654.321

Lo que sigue *sí* es una curiosidad, y aunque no tengo una explicación para dar, resulta simpático.

Tome el número

1.741.725

Eleve cada dígito a la séptima potencia y sume los resultados. Es decir:

$$1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$$

¿Cuánto le dio?

Bueno, si tuvo paciencia (o una calculadora) para hacer la cuenta, el resultado es: 1.741.725.

Ahora, tome un número de *tres dígitos cualquiera.* Digamos el:

472

Construya el número que resulte de escribirlo *dos veces seguidas.* En este caso:

472.472

Divida ahora por 7. Con lo que se obtiene:

67.496

Divida ese resultado por 11. Se tiene entonces:

6.136

y a éste divídalo por 13.

El resultado final es…

¡472!

Es decir, el número original, con el que empezó.

¿Por qué pasó esto? ¿Pasará lo mismo con cualquier número que uno elija?

Antes de dar las respuestas, observe que en el camino dividimos el número por 7, y dio un resultado exacto. Después lo dividimos por 11, y volvió a dar un número entero, y finalmente, encontramos un número que resultó ser un múltiplo de 13.

Más allá de correr a leer por qué pasa esto *siempre* con cualquier número de tres dígitos que uno elija, le sugiero que piense un poco la solución. Es mucho más gratificante pensar uno solo, aunque no se llegue al resultado, que buscar cómo lo resolví yo. Si no, ¿qué gracia tiene?

SOLUCIÓN:

Lo primero que uno tiene es un número de tres dígitos; llamémoslo:

abc

Luego, había que repetirlo:

abcabc

El trámite que siguió fue dividir ese número, primero por 7, luego por 11 y finalmente por 13. ¡Y en todos los casos obtuvo un resultado exacto, sin que sobrara nada!

Eso significa que el número *abcabc* tiene que ser *múltiplo* de 7, 11 y 13. Es decir que tiene que ser múltiplo del *producto* de esos tres números.[1] Y justamente, el producto de esos números es:

$$7 \,.\, 11 \,.\, 13 = 1.001$$

¿Por qué pasa, entonces, que el número en cuestión es múltiplo de 1.001?

Si uno *multiplica* el número *abc* por 1.001, ¿qué obtiene? (Realice la cuenta y después continúe leyendo.)

$$abc \,.\, (1.001) = abcabc$$

Acaba de descubrir por qué pasó lo que pasó. Si a cualquier número de tres dígitos (*abc*) se le agrega delante el mismo número, el resultado (*abcabc*) es un múltiplo de 1.001. Y cuando se divide el número *abcabc* por 1.001, el resultado que se obtiene es *abc*.[2]

[1] Porque si un número es múltiplo de 3 y de 5, por ejemplo, tiene que ser múltiplo de 15, que es el producto entre 3 y 5. Esto sucede –y le sugiero que lo piense solo también– porque todos los números aquí involucrados son *primos.* Por ejemplo, el número 12 es múltiplo de 4 y de 6, pero *no* es múltiplo de 24 (producto de 4 y de 6). En el caso en que los números en cuestión sean *primos,* entonces *sí* el resultado será cierto.

[2] Debemos advertir que si uno multiplica un número de tres dígitos por 1.001, obtendrá el mismo número repetido dos veces consecutivas.

No deja de ser una curiosidad, aunque tiene un argumento que lo sustenta. Y un poco de matemática también.

¿Cómo *multiplicar* si uno no sabe las tablas?

Lo que sigue va en ayuda de aquellos chicos que se resisten a aprender de memoria las tablas de multiplicar. Me apuro a decir que los comprendo perfectamente porque, en principio, cuando a uno le enseñan a repetirlas, no le queda más remedio que subordinarse a la “autoridad” del/la maestro/a, pero a esa altura no está claro (para el niño) por qué tiene que hacerlo. Lo que sigue es, entonces, una forma “alternativa” de multiplicar, que permite obtener el producto de dos números cualesquiera sin saber las tablas. Sólo se requiere:

a) saber multiplicar por 2 (o sea, duplicar);
b) saber dividir por 2, y
c) saber sumar.

Este método no es nuevo. En todo caso, lo que podría decir es que está en desuso u olvidado, ya que era la forma en que multiplicaban los egipcios y que aún hoy se utiliza en muchas regiones de Rusia. Es conocido como la *multiplicación paisana*. En lugar de explicarlo en general, voy a ofrecer un ejemplo que será suficiente para entenderlo.

Supongamos que uno quiere multiplicar 19 por 136. Entonces, prepárese para escribir en dos columnas, una debajo del 19 y otra, debajo del 136.

En la columna que encabeza el 19, va a dividir por 2, “olvidándose" de si sobra algo o no. Para empezar, debajo del 19 hay que poner un 9, porque si bien 19 dividido 2 no es exactamente 9, uno ignora el resto, que es 1, y sigue dividiendo por 2. Es decir que debajo del 9 pone el número 4. Luego, vuelve a dividir por 2 y queda 2, y al volver a dividir por 2, queda 1. Ahí para.

Esta columna, entonces, quedó así:

19
9
4
2
1

Por otro lado, en la otra columna, la encabezada por el 136, en lugar de dividir por 2, multiplique por 2 y coloque los resultados a la par de la primera columna. Es decir:

19	136
9	272
4	544
2	1.088
1	2.176

Cuando llega al nivel del número 1 de la columna de la izquierda detenga la duplicación en la columna del 136. Convengamos en que es verdaderamente muy sencillo. Todo lo que hizo fue dividir por 2 en la columna de la izquierda y multiplicar por 2 en la de la derecha. Ahora, sume sólo los números de la columna derecha que corresponden a números impares de la izquierda. En este caso:

19	136
9	272
4	~~544~~
2	~~1.088~~
1	2.176

Al sumar sólo los compañeros de los impares, se tiene:

$$136 + 272 + 2.176 = 2.584$$

que es (¡justamente!) el producto de 19 por 136.

Un ejemplo más.

Multipliquemos ahora 375 por 1.517. Me apuro a decir que da lo mismo elegir cualquiera de los dos números para multiplicarlo o dividirlo por 2, por lo que sugiero, para hacer menor cantidad de cuentas, que tomemos el 375 como "cabeza" de la columna en la que dividiremos por 2. Se tiene entonces:

375	1.517
187	3.034
93	6.068
46	12.136
23	24.272
11	48.544
5	97.088
2	194.176
1	388.352

Ahora hay que sumar los de la segunda columna cuyos compañeros de la primera columna sean impares:

375	1.517
187	3.034
93	6.068
46	~~12.136~~
23	24.272
11	48.544
5	97.088
2	~~194.176~~
1	388.352
	568.875

Y, justamente, 568.875 es el producto que estábamos buscando.

Ahora, lo invito a que piense por qué funciona este método que no requiere que uno sepa las tablas de multiplicar (salvo la del 2, claro).

EXPLICACIÓN:

Cuando uno quiere encontrar la escritura binaria de un número, lo que debe hacer es dividir el número por 2 reiteradamente, y anotar los restos que las cuentas arrojan. Por ejemplo:

173	=	**86** . 2 +	1
86	=	**43** . 2 +	0
43	=	**21** . 2 +	1
21	=	**10** . 2 +	1
10	=	**5** . 2 +	0
5	=	**2** . 2 +	1
2	=	**1** . 2 +	0
1	=	**0** . 2 +	1

De modo que el número 173 se escribirá (recorriendo los restos de abajo hacia arriba):

10101101

Supongamos ahora que uno quiere multiplicar 19 por 136. Entonces, lo que hacíamos era dividir sucesivamente por 2 el número 19:

19	=	**9** . 2 +	1
9	=	**4** . 2 +	1
4	=	**2** . 2 +	0
2	=	**1** . 2 +	0
1	=	**0** . 2 +	1

Es decir que la escritura binaria del 19 se obtiene recorriendo de abajo hacia arriba los restos; por lo tanto, se tiene el:

10011

Por otro lado, esto nos dice que el número 19 se escribe así:

$$19 = 1 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 0 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 = (16 + 2 + 1)$$

Luego, cuando uno tiene que multiplicar 19 por 136, aprovechamos la escritura en *binario* de 19, y anotamos:

$$19 \,.\, 136 = 136 \,.\, 19 = 136 \,.\, (16 + 2 + 1) =$$

(Y ahora, usando la propiedad *distributiva* de la multiplicación, se tiene:)

$$= (136 \,.\, 16) + (136 \,.\, 2) + (136 \,.\, 1) = 2.176 + 272 + 136 = 2.584$$

Esto explica por qué funciona este método para multiplicar. Encubiertamente, uno está usando la escritura binaria de uno de los números.

Veamos el otro ejemplo (375 . 1.517):

$$\begin{array}{rcrl|c|}
\cline{5-5}
375 & = & \mathbf{187} & .\, 2 + & 1 \\
187 & = & \mathbf{93} & .\, 2 + & 1 \\
93 & = & \mathbf{46} & .\, 2 + & 1 \\
46 & = & \mathbf{23} & .\, 2 + & 0 \\
23 & = & \mathbf{11} & .\, 2 + & 1 \\
11 & = & \mathbf{5} & .\, 2 + & 1 \\
5 & = & \mathbf{2} & .\, 2 + & 1 \\
2 & = & \mathbf{1} & .\, 2 + & 0 \\
1 & = & \mathbf{0} & .\, 2 + & 1 \\
\cline{5-5}
\end{array}$$

Luego, la escritura *binaria* del 375 es:

$$375 = 101110111$$

Es decir:

$$375 = 1 \,.\, 2^8 + 0 \,.\, 2^7 + 1 \,.\, 2^6 + 1 \,.\, 2^5 + 1 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 =$$

$$= 256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 \quad (*)$$

Si uno quisiera multiplicar 1.517 por 375, lo que debe hacer es descomponer el número 375, como está indicado en (*).

Luego:

$$1.517 \,.\, 375 = 1.517 \,.\, (256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1) =$$

(Usando la propiedad distributiva del producto otra vez:)

$$= (1.517 \,.\, 256) + (1.517 \,.\, 64) + (1.517 \,.\, 32) + (1.517 \,.\, 16) + (1.517 \,.\, 4) + (1.517 \,.\, 2) + (1.517 \,.\, 1)$$

$$= 388.352 + 97.088 + 48.544 + 24.272 + 6.068 + 3.034 + 1.517$$

que son justamente los sumandos que teníamos antes.

En definitiva, la escritura en binario permite encontrar la descomposición de uno de los dos números que queremos multiplicar y, al hacerlo, explica cuántas veces hay que *duplicar* el otro.

¿Cómo *dividir* sin saber las tablas de multiplicar?

Aquí corresponde hacer una breve introducción.

Ni bien decidí incluir el artículo anterior (sobre la multiplicación sin saber las tablas), me propuse encontrar una manera que permitiera hacer algo parecido con la división. Es decir: ¿cómo dividir dos números sin tener que aprender primero las tablas de multiplicar?

Les planteé el problema a dos excelentes matemáticos amigos, Pablo Coll y Pablo Milrud, diciéndoles que me sentiría frustrado y con la sensación de que la tarea quedaría inconclusa si no encontraba cómo dividir con esa premisa. Ellos pensaron, discutieron, me propusieron una forma que consideramos entre los tres y que volvió a ser sometida a su análisis. Quiero presentar aquí una versión muy buena, encontrada por los dos Pablos –quienes se merecen todo el crédito–, que estoy seguro servirá de estímulo para los docentes, quienes podrán mejorarlo, o tenerlo como un recurso más en sus manos.

Debo recalcar que no se trata de olvidarnos de las tablas, sino de discutir si vale la pena someter a los alumnos a la "tortura virtual" de tener que aprender de memoria una cantidad de números a una edad en la que podrían dedicarle ese tiempo y esa energía a otras cosas, mientras esperamos que la maduración natural les permita deducir a ellos solos qué son las tablas y para qué sirven. Eso sí: como uno no puede (o no quiere) esperar tanto tiempo para aprender a dividir y multiplicar, necesita encontrar métodos alternativos para hacerlo. Seguramente habrá otros mejores, por lo que lo invito a pensarlos y proponerlos.

Allá voy.

Para poder dividir dos números sin tener que saber las tablas de multiplicar hace falta saber sumar, restar y multiplicar por 2. Eso es todo.

Le pido que me tenga confianza porque, si bien al principio puede parecer complicado, es en realidad muchísimo más fácil que dividir en la forma convencional, y aunque sea sólo por eso, porque ofrece una manera alternativa a lo que uno aprendió en la escuela y se *corre* de lo clásico, vale la pena prestarle atención.

En lugar de detenerme en todos los tecnicismos que requeriría un libro de texto o de matemática, mostraré algunos ejemplos con creciente grado de dificultad.

El método consiste en fabricar cuatro columnas de números a partir de los dos números que uno tiene como datos.

EJEMPLO 1

Para dividir 712 por 31, completo en primer lugar la primera columna y luego la cuarta:

31			1
62			2
124			4
248			8
496			16
712			

Para obtener la primera columna, empiezo con el número por el que queremos dividir; en este caso, el 31. A partir de él, en forma descendente, multiplico por 2 en cada paso. ¿Por qué paré en el 496? Porque si multiplico el 496 por 2, obtendría un número (992) mayor que 712 (el número que originariamente quería dividir). Por eso, en lugar de poner el 992, anoto el 712. Es decir que para generar la primera columna, sólo hace falta saber multiplicar por 2 y estar atento para terminar el proceso en el paso anterior a superar nuestro segundo número.

La cuarta columna se obtiene igual que la primera, sólo que en lugar de empezar con el 31, empiezo con el número 1. Como se advierte, irán apareciendo las distintas potencias del número 2. Detengo el proceso en el mismo lugar en que me detuve en la primera columna. Hasta aquí, todo lo que uno necesita saber es multiplicar por 2.

¿Cómo se completan las dos columnas del medio? Así:

31		30	1
62	30		2
124	92		4
248		216	8
496	216		16
712			

Para realizar este paso, lo que necesita saber es restar. Empiezo de abajo hacia arriba, restando el número que tenemos para dividir (el 712) menos el anteúltimo número de la columna uno (496). Al resultado, lo anoto en la columna dos, y así aparece el 216. Ahora comparo el 216 con el 248. Como no lo podemos restar (porque 216 es menor que 248, y sólo trabajamos con números positivos), guardamos el 216 en la columna tres.

Ahora sigo hacia arriba (comparando siempre con la primera columna): como 216 es mayor que 124, entonces los resto. El resultado (92) va en la segunda columna. Un paso más: como 92 es mayor que 62, los resto nuevamente y obtengo el 30. Otra vez lo pongo en la segunda columna. Y aquí, como 30 es menor que 31, no lo puedo restar y lo vuelvo a anotar en la tercera columna.

Ya casi llegamos al final. Sólo falta un paso, y convengamos que el proceso hasta acá fue muy sencillo. ¿Cómo termina? Todo lo que hay que hacer es sumar los números de la cuarta columna que tengan un compañero en la segunda. Es decir:

$$2 + 4 + 16 = 22$$

Y obtenemos el número que estábamos buscando.

El resultado de dividir 712 por 31 es 22, y sobra el número 30, que figura en la columna tres, donde paré el proceso.

Verifíquelo:

$$31 \,.\, 22 = 682$$

Como escribí más arriba, el resto es 30. Luego:

$$682 + 30 = 712$$

Y se terminó. Resumen: se arman cuatro columnas. En la primera y la cuarta se trata de ir multiplicando por 2, empezando en la columna de la izquierda por el número por el que queremos dividir, y en la de la derecha, por el número 1.

En las columnas del medio se anotan los resultados de las restas, y cuando se puede restar, el número se guarda en la columna dos. Cuando no se puede restar, se coloca en la columna tres. El cociente se obtiene sumando los números de la cuarta columna que tienen un compañero en la segunda. Y el resto es el número que sobra en la columna dos o en la columna tres.

EJEMPLO 2

Para dividir 1.354 por 129, escribo la tabla directamente:

129		64	1
258	64		2
516		322	4
1.032	322		8
1.354			

El número 322 que figura en la columna dos resultó de restar 1.354 – 1.032. Como 322 es menor que 516, lo tuve que poner en la columna tres. Como 322 es mayor que 258, los resté y el resultado, 64, lo puse en la columna dos. Como 64 es menor que 129, lo puse en la columna tres. Y ahí terminé de construir la tabla.

Lo único que falta, entonces, es calcular el cociente y el resto. El cociente lo obtiene sumando los números de la cuarta columna que tienen un compañero en la segunda (es decir, cuando no ha quedado un lugar vacío). El cociente en este caso es:

$$2 + 8 = 10$$

El resto es el primer número de la columna tres, es decir: 64.

Hemos descubierto de esta manera que, si uno divide 1.354 por 129, el cociente es 10 y el resto, 64. Verifíquelo.

Ejemplo 3

Ahora dividamos 13.275 por 91. Construyo la tabla como en los ejemplos anteriores:

91	80		1
182		171	2
364		171	4
728		171	8
1.456	171		16
2.912		1.627	32
5.824		1.627	64
11.648	1.627		128
13.275			

Con la tabla conseguimos, entonces, el cociente y el resto. El cociente, de sumar los números de la cuarta columna que tengan un compañero en la columna dos. Es decir:

$$1 + 16 + 128 = 145$$

Para determinar el resto miramos lo que sobró donde paré el proceso. En este caso, el número 80.

Verificación:

$$145 \,.\, 91 = 13.195$$
$$13.195 + 80 = 13.275$$

Último ejemplo

Quiero dividir 95.837 por 1.914. Construyo entonces la siguiente tabla:

1.914		137	1
3.828	137		2
7.656		3.965	4
15.312		3.965	8
30.624	3.965		16
61.248	34.589		32
95.837			

El número 34.589 resultó de restar 95.837 menos 61.248. El 3.965 resultó de restar 34.589 menos 30.624. Como 3.965 es menor que 15.312 y que 7.656, lo escribí dos veces en la tercera columna. Ahora, como 3.965 es mayor que 3.828, los puedo restar, y obtengo el 137. Como 137 es menor que 1.914, lo dejo en la tercera columna.

El cociente lo consigo sumando los números de la cuarta columna que tienen un compañero en la segunda. En este caso:

$$2 + 16 + 32 = 50$$

El resto es el último número en donde terminó el proceso (que puede figurar en la columna dos o en la tres). En este caso, es 137.

Verificación:

$$1.914 \, . \, 50 = 95.700$$

A lo que agrego el resto:

$$95.700 + 137 = 95.837$$

Y llego a lo que quería comprobar.

Para terminar, un par de observaciones:

a) No explico aquí por qué funciona el método porque no tendría el espacio adecuado, pero a aquellos que estén interesados, todo lo que deben hacer es *replicar* lo que uno hace cuando efectúa cualquier división común. Este método opera de la misma forma que el que uno conoce desde la escuela primaria, sólo que se usan (encubiertamente) los números binarios.

b) Más allá de que alguien adopte estos métodos para dividir y/o multiplicar sin tener que saber las tablas, lo que intento proponer es que hay otras maneras de hacerlo. Creo que hay que explorarlas para que, en definitiva, *enseñar las operaciones elementales* no sea una tortura para nadie.

Monedas en carretilla

¿Cuántas veces por día uno *estima* algo y no necesariamente se da cuenta de que lo hace?

En realidad, uno *vive* estimando todo el día, todo el tiempo. Voy a demostrarlo.

Cuando alguien sale de su casa, *estima* cuánto dinero tiene que llevar, pensando en el día que tendrá por delante. (Claro, eso si *tiene* dinero para llevar, y si *tiene* algún lugar adonde ir. Pero supongamos que se cumplen ambos requisitos.) Además, *estima* cuánto tiempo antes debe salir de su casa para llegar adonde debe ir. *Estima* si le conviene esperar el ascensor que está tardando más de la cuenta, o si le conviene bajar por la escalera. Y *estima* si le conviene ir en colectivo o en taxi, de acuerdo con el tiempo disponible. Y *estima* al cruzar la calle, si vienen autos, el tiempo que tardarán en llegar hasta él. Y decide entonces si cruza o no. Sin saberlo, estará *estimando* la velocidad del auto que viene a su izquierda, y la estará comparando con su propia *velocidad* para cruzar. Si va manejando un auto, *estima* cuándo tiene que apretar el freno y cuándo acelerar. O *estima* si llegará a cruzar el semáforo en verde o en amarillo, o si no cruzará. También *estima* cuántos cigarrillos comprar para el día, cuántos de ellos va a fumar, *estima* cuánto va a engordar con lo que comerá, *estima* a qué función del cine va a llegar… *Estima, estima...* y luego decide.

Creo que estará de acuerdo conmigo en que uno *vive estimando*, aunque no lo sepa. Estamos entrenados para hacer las cosas en piloto automático, pero cuando a uno lo corren un poquito de las estimaciones cotidianas, trastabilla. No siempre, claro, pero a nadie le gusta que lo muevan de la zona en la que se siente confortable.

Por ejemplo: supongamos que está parado en la vereda cerca de un edificio muy alto, digamos de *100 pisos*. Supongamos también que le digo que camiones blindados, de esos que transportan caudales, depositaron en la vereda suficientes monedas de un peso como para que las empiece a apilar en la base del edificio con la idea de llegar con ellas hasta la terraza.

Ahora, la parte importante: en la vereda dejaron una carretilla que mide un metro de ancho, por un metro de largo, por un metro de alto. Es decir que tiene un volumen de un metro cúbico.

¿Cuántos viajes tendrá que hacer con la carretilla llena de monedas, para levantar una pila o columna de monedas de un peso y llegar hasta la terraza del edificio?

Se trata de *estimar* cuántos viajes se necesitan. No hace falta hacer un cálculo *exacto*, sino dar una respuesta *estimativa.*

Aquí es donde lo dejo pensar solo; eventualmente puede usar la respuesta que figura más abajo, para *confirmar* lo que pensó. Y si bien la tentación es decir: "Ahora no tengo tiempo, voy a leer la solución", se perderá la oportunidad de disfrutar de sólo pensar. Nadie lo mira… y, por otro lado, ¿no es interesante poder hacer algo con lo que uno entrena el pensamiento, entrena la intuición, sin que haya nada en juego más que el *placer* de hacerlo?

Como incentivo, agrego una breve historia.

Este problema me lo contó Gerardo Garbulsky, doctor en Física del MIT y actual director de una consultora muy importante radicada en la Argentina. En el proceso de buscar gente para contratar, realizó esta pregunta a unos doscientos aspirantes. La distribución –aproximada– de las respuestas fue la siguiente:[3]

1 carretilla: 1 persona
10 carretillas: 10 personas
100 carretillas: 50 personas
1.000 carretillas: 100 personas
10.000 carretillas: 38 personas
Más de 10.000 carretillas: 1 persona

SOLUCIÓN:

La moneda de un peso argentino tiene 23 milímetros de diámetro y un espesor de 2,2 milímetros. Estos datos, obviamente, son aproximados, pero a los efectos del problema planteado son más que suficientes. Recuerde que no queremos una respuesta exacta sino una *estimación*.

Entonces, para hacer las cuentas más fáciles, voy a suponer que cada moneda tiene 25 milímetros de diámetro y 2,5 milímetros de espesor. Veamos cuántas monedas entran en la carretilla (de un metro cúbico de volumen). Estimemos cuántas se pueden poner en la base (que tiene un metro de largo por uno de ancho).

[3] Gerardo establece una diferencia entre la *estimación intuitiva* y la *estimación calculada.* Cuando realizaba esta pregunta en las entrevistas, pedía a los candidatos que primero le dijeran cuántos viajes eran necesarios sin hacer *ningún* cálculo. Así se obtuvieron las primeras respuestas. Después les pidió la estimación cuantitativa, y ahí el 99 por ciento de las respuestas fueron correctas. Es muy distinto tener "educada la intuición" o "ser capaz de estimar cantidades". La segunda es una capacidad que, ejercida repetidamente, ayuda a generar la primera, pero son de naturaleza muy distinta.

1	moneda	25	mm
4	monedas	100	mm
40	monedas	1.000	mm = 1 metro

Luego, como la base es cuadrada (de un metro por un metro), entran 40 . 40 = 1.600 monedas. Y como la carretilla tiene un metro de altura, y de espesor cada moneda tiene 2,5 milímetros, veamos cuántas monedas entran "a lo alto":

1	moneda	2,5	mm
4	monedas	10	mm
400	monedas	1.000	mm = 1 metro

De modo que en la base entran 1.600 monedas, y eso hay que multiplicarlo por 400 monedas de altura.

400 . 1.600 = 640.000 monedas

Hagamos una pausa por un instante.

Acabamos de *estimar* que en cada carretilla de un metro cúbico entran casi 650.000 monedas. Guardemos este dato en la memoria. Falta ahora que *estimemos* cuántas monedas hacen falta para levantar una columna que vaya desde la base del rascacielos de 100 pisos hasta la terraza.

Estamos parados frente a un edificio de 100 pisos. Podemos *estimar* que la *altura* de cada piso es de *3 metros.* Es decir, que un rascacielos de *100 pisos* tiene una altura de unos 300 metros. ¡Tres cuadras!

Ahora, *estimemos* cuántas monedas hacen falta para llegar hasta la terraza:

1	moneda	2,5	mm
4	monedas	10	mm
40	monedas	100	mm
400	monedas	1.000	mm = 1 metro

Es decir que hacen falta 400 monedas para llegar a tener *1 metro* de altura, de modo que, para llegar a 300 metros, multiplicamos por 400.

RESULTADO: 300 . 400 = 120.000 monedas

MORALEJA: Con una carretilla, alcanza y sobra.

Para concluir, veamos un par de reflexiones estimuladas por comentarios del propio Garbulsky y por Eduardo Cattani, otro excelente matemático y amigo, que trabaja hace muchísimo tiempo y con singular éxito en Amherst, Massachusetts.

Eduardo sugiere que "la altura de la moneda *no* es un dato necesario para hacer la estimación cuantitativa". Parece raro, pero sígame en este razonamiento: si se sabe que en la base de la carretilla entran 1.600 monedas y vamos a apilar monedas hasta que lleguen a un metro de altura, al finalizar el proceso tendremos 1.600 columnas de un metro.

Luego, cuando saquemos las monedas de la carretilla y pongamos cada pila de un metro encima de la otra, ¡formaremos una columna de 1.600 metros! Y para esto, no hizo falta saber cuál era el espesor de cada moneda.

Ahora que el problema terminó, le propongo pensar qué *aprende* uno de él. La intuición consiste en tratar de extrapolar las experiencias acumuladas en la vida y usarlas en las nuevas situaciones que se presenten. Esto, obviamente, no está mal. Sólo que cuando uno tiene que operar en diferentes escenarios, en donde los volúmenes son enormes, o las cantidades son más grandes, empieza a deslizarse por caminos desconocidos. Pero, como en todo, uno se entrena y aprende.

Ah… Creo que Gerardo sugirió que le dieran el puesto a la *única* persona que dijo que hacía falta *un solo viaje.*[4]

La historia de Google

¿Quiere entrar a trabajar en Google? Necesita estar preparado, por ejemplo, para resolver problemas como los que siguen.

La historia, al menos para mí, empezó en agosto del 2004. Estaba en Boston y al pasar por una estación de subte vi un cartel de publicidad muy grande, de unos quince metros de largo, colgado del techo de la estación correspondiente a la Universidad de Harvard. El cartel decía:

(primer primo de 10 dígitos consecutivos del desarrollo de e).com

Nada más. Eso era *todo* lo que decía el enorme cartel. Obviamente, me llamó muchísimo la atención, y lo primero que pensé

[4] Gerardo Garbulsky también reflexiona acerca del hecho de que la altura de la moneda no es un dato necesario para realizar la estimación cuantitativa. Por ejemplo: a) lo único necesario es saber el volumen de la torre de monedas, que obviamente no depende de la altura de cada moneda, sino de su diámetro y la altura del edificio; b) si las monedas tuvieran cualquier otra altura, por ejemplo, 1 metro, 1 dm, 1 cm, la respuesta sería la misma. De hecho, cuando uno hace la cuenta, la *altura* de la moneda se "cancela" en el mismo cálculo. Este aspecto del problema también es muy interesante, ya que más de la mitad de los entrevistados trató de calcular la altura (espesor) de la moneda para determinar la estimación cuantitativa. Dicho sea de paso, el espesor de la moneda es muy importante si uno quiere saber cuánto dinero hay en la torre de monedas.

era si se trataría efectivamente de un cartel de publicidad o si alguien estaría haciendo una broma o algo por el estilo. Pero no, el cartel tenía todas las características de ser una propaganda convencional.

Sin que nadie se sienta intimidado, podemos afirmar que cuando uno dice que algo crece *exponencialmente*, aunque no lo sepa, involucra al número *e*. Cuando uno habla de logaritmos, habla del número *e*. Cuando habla de interés compuesto, habla del número *e*. Cuando se refiere a la escala de Richter para medir terremotos, está involucrado el número *e*.

Del mismo modo que nos acostumbramos a oír o a leer que el número *pi* se escribe:

$$pi = 3{,}14159\ldots$$

el número *e* también tiene *infinitas cifras,* y las primeras son:

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

El número *e* es una suerte de pariente cercano de *pi*, en el sentido de que, como *pi*, es irracional y trascendente.

La historia sigue así: después de ver el cartel (y descubrirlo en otros lugares más), le comuniqué mi hallazgo a mi amigo Carlos D'Andrea, matemático egresado de la Universidad de Buenos Aires (UBA), ahora instalado en Barcelona luego de su exitoso paso por Berkeley.

Carlos le trasladó la pregunta a Pablo Mislej, otro matemático argentino que en ese momento trabajaba en un banco en Buenos Aires (y acababa de tener su primer hijo). Unos días después, Pablo me escribió un e-mail contándome lo que había encontrado. Ni bien vio el problema, comprendió que necesitaba encontrar la mayor cantidad de decimales que hubiera publicados del número *e*. Y encontró el primer millón de dígitos de *e* en esta página:

http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil

Esos datos se conocen hace ya muchos años, más precisamente desde 1994. Lo que tuvo que hacer Pablo fue separar la información en segmentos de diez numeritos cada uno, y luego fijarse cuál era el primero en formar un número primo. Como se dará cuenta, todo esto es imposible de realizar sin una computadora, y siendo capaces de crear un programa que lo procese.

La primera tira de 10 dígitos que cumplía con lo pedido era:

7427466391

El número 7 que aparece en primer lugar en la tira corresponde al dígito 99 de la parte decimal del número *e*.

Con ese dato, a continuación Pablo tuvo que ir a la página web http://www.7427466391.com y ver qué pasaba. Cuando llegó a ese punto, se encontró con otro problema (algo así como *La búsqueda del tesoro*). Claro que para llegar a él debió resolver el primero.

Y lo que Pablo vio fue lo siguiente:

f(1) = 7182818284
f(2) = 8182845904
f(3) = 8747135266
f(4) = 7427466391
f(5) = ___________

En este caso, se trataba de completar la secuencia. Es decir, a partir de los primeros cuatro números de la columna de la

derecha, había que descubrir qué número correspondía al quinto lugar.

Pablo me escribió que, con un poco de suerte, advirtió que la suma de los diez dígitos de los primeros cuatro números da siempre 49. No sólo eso: como ya tenía los datos sobre el número *e* y su desarrollo, dedujo que los primeros cuatro números de esa columna correspondían a cuatro de las "tiras" que él ya tenía. Es más: vio que el primer número,

7182818284

correspondía a los primeros *diez dígitos* del desarrollo decimal del número *e*.

El segundo:

8182845904

son los dígitos que van del *quinto hasta el decimocuarto lugar.*

El tercero:

8747135266

corresponde a los dígitos que van del lugar 23 al 32. Y por último, el cuarto:

7427466391

es la "tira" que involucra a los dígitos 99 al 108 del desarrollo de *e*. Se dio cuenta, entonces, de que estaba cerca: necesitaba buscar ahora la primera "tira" de todas las que no había usado, que sumara 49… ¡Y la encontró!

El candidato a ser el quinto número de la secuencia era el

5966290435

que corresponde a los dígitos 127 al 136 del desarrollo decimal.

Cuando completó la secuencia, y pulsó *enter* en su computadora, apareció súbitamente en otra página web. Ésta decía:

http://www.google.com/labjobs/index.html

donde invitaban a enviar el currículum vitae, que sería tenido en cuenta por la firma Google para un futuro contrato, porque quien hubiera ingresado en esa página habría superado los obstáculos que ellos creían suficientes para poder pertenecer a la empresa.[5]

Los tests de inteligencia

Quiero retomar aquí el tema de la *inteligencia.* No sólo porque es apasionante, debatible y del que se sabe muy poco, sino porque sería interesante discutir sobre los métodos que se utilizan comúnmente para medirla. De hecho, es curioso que algunas personas –de cuya buena fe no tengo por qué dudar (aunque… de acuerdo… de algunos desconfío…)– ofrezcan tests para medir algo cuya definición no se conoce. ¿Qué se evalúa entonces?

[5] Como dato ilustrativo, otro amigo mío y profesor de la Facultad de Ciencias Exactas (UBA), Ricardo Durán, también resolvió el problema. Por ahora, Pablo sigue trabajando en el banco, y Ricardo es uno de los mejores profesores que tiene el departamento de matemática de la Facultad y uno de los mejores tipos que conozco.

Por ejemplo: le dan una tabla de números en la que *falta* uno y le piden que diga qué número falta y que explique cómo llegó a ese resultado.

54	(117)	36
72	(154)	28
39	(513)	42
18	(¿?)	71

El test, supuestamente, consiste no sólo en que pueda determinar qué número debería ir en lugar de los signos de interrogación, sino también en medir su capacidad de análisis para deducir *una ley de formación.* Es decir: alguien pensó en un patrón que subyace tras la gestación de esos números, y pretende que usted lo descubra.

Si yo fuera usted, pararía un rato y pensaría en alguna solución. Aquí voy a proponerle una alternativa, pero, en todo caso, uno puede entretenerse buscándola sola/o.

Una potencial solución

Uno podría decir que el número que falta es el 215. Mire los números que integran la primera fila en la primera y tercera columna: 54 y 36 . La suma de los dos exteriores (5 + 6) da 11, y la suma de los dos interiores (4 + 3) da 7.

De esa forma, se obtuvo el número 117: juntando la suma de los dos exteriores con la de los dos interiores.

Pasemos ahora a la siguiente fila y hagamos el mismo ejercicio. Los dos números de la primera y la tercera columna son 72 y 28. Sumando los dos exteriores (7 + 8) da 15 y sumando los dos interiores (2 + 2) da 4. Entonces, el número que va en el centro es 154.

Si uno sigue en la tercera fila, tiene 39 y 42. La suma de los dos exteriores (3 + 2) da 5 y la de los dos interiores (9 + 4) da 13. Por lo tanto, el número que va en el centro es el 513.

Por último, con este patrón, dados los números 18 y 71, los dos exteriores suman (1+ 1) 2, y los dos centrales (8 + 7), 15. Corolario: si quien diseñó pensó igual que usted (o que yo) el número que falta es el 215.

Me apresuro a decir que *ninguno de estos métodos es fiable, ni mucho menos exacto.* De hecho, habría –y en general *hay*– infinitas maneras de encontrar un número que ocupe el lugar del signo de interrogación. Se trata, en todo caso, de ser capaz de buscar el que pensaron los que diseñaron el test.

Otro ejemplo (muy ilustrativo)

Alicia Dickenstein, la brillante matemática argentina, me invitó a pensar un poco más sobre las personas que producen estos tests. "Creo que estos IQ [*Intelligence Quotient*] tests son muy peligrosos –me dijo–. No son más que algo estándar que puede aprenderse y sólo miden el aprendizaje cuadrado en una dirección. Es decir: no se sabe bien qué miden y algunas personas, inescrupulosas y malintencionadas, se permiten sacar conclusiones sobre la supuesta 'inteligencia' o 'no' de un sujeto. De hecho, en los Estados Unidos hubo una gran controversia sobre este tipo de tests, ya que se usaban para ubicar a los 'afroamericanos' en clases más retrasadas con una obvia intención segregacionista. Lo único que se puede comprobar es que hay gente que no está entrenada para este tipo de tests. Y nada más."

Sigo yo: el peligro latente (o no tanto) es que cuando a un chico o a un joven se lo somete a este tipo de problemas, contesta como puede, en general, con bastante miedo a equivocarse. La sensación que prima en el que rinde el test (y en sus padres), es que lo están juzgando "para siempre". Es que, de hecho, como supuestamente mide la inteligencia, y salvo que uno la pueda mejorar con el paso del tiempo (*lo que natura non da, Salamanca non presta*), la idea de que es algo definitivo está siempre presente. Una sensación de alivio recorre a todos, al que rindió el test y a la familia, cuando el implicado contesta lo que pensaron los que lo prepararon. En todo caso, sólo demuestra que es tan inteligente como para hacer lo que ellos esperaban.

Si, por el contrario, no encuentra la respuesta o se equivoca, se expone a enfrentar la cara circunspecta (y exagero, obviamente) de quien llega con una mala noticia: "Lamento comunicarle que usted será un *estúpido* toda su vida. Dedíquese a otra cosa".

Aunque más no sea por eso, cualquier test que presuma de medir algo tan *indefinible* como la inteligencia, debería ser hecho en forma hipercuidadosa.

Lo que sigue es un ejemplo que me mandó Alicia, que invita a la reflexión. De hecho, le pido que lea el test (es una verdadera pavada) y piense qué respuesta daría. Verá que, aun en los casos más obvios, *no hay una respuesta única.* Aquí va:

Si uno encuentra la siguiente serie de números (agrupados de la forma que se indica):

1	2	3
4	5	6
7	8	¿?

¿Qué número pondría en reemplazo de los signos de interrogación?

(Deténgase un momento para pensar qué haría usted.)

No me diga que no pensó o consideró el número 9, porque no le creo. Claro, ése sería el pensamiento que Alicia Dickenstein denomina "rutinario", o bien: "el que responde lo que el que pregunta quiere oír". Y esta última afirmación es muy importante. Porque, ¿qué pasaría si le dijera que la serie se completa así?:

1	2	3
4	5	6
7	8	27

Seguramente pensaría que leyó mal o que hay un error de imprenta. No, el último número es el 27. Le muestro el patrón que podría haber buscado quien pensó el problema.

Tome el primer número y elévelo al cuadrado (o sea, multiplíquelo por él mismo). Al resultado réstele cuatro veces el segundo, y a lo que obtenga, súmele 10. En la primera fila, entonces, al elevar 1 al cuadrado, obtendrá otra vez 1. Ahora le resta cuatro veces el segundo, es decir, cuatro veces el número 2, y le suma 10. Resultado: 3

$1 - 8 + 10 = 3$ (que es el tercer número de la primera fila)

En la segunda fila, eleve el primer número al cuadrado (4^2), o sea $4 \cdot 4$, con lo que obtiene 16. Le resta cuatro veces el segundo número ($4 \cdot 5 = 20$) y le suma 10. Resultado: 6.

$$16 - 20 + 10 = 6$$

En la tercera fila tendría 7 al cuadrado (49), menos cuatro veces el segundo ($4 \cdot 8 = 32$), más 10. Resultado: ¡27!

$$49 - 32 + 10 = 27$$

MORALEJA 1: Trate de entrenarse haciendo este tipo de tests y verá cómo al final le salen todos, o casi todos. Ése será el momento en que quizá crea que es más inteligente. Lo curioso es que tal vez haya aprendido a *someterse mejor* al pensamiento oficial.

MORALEJA 2: Pretender usar a la matemática como un testeador de la inteligencia puede producir un efecto no sólo negativo y frustrante, sino *falso.* Aunque más no sea porque no se sabe qué se mide.

Sudoku

¿Sudoku dijo? ¿Qué es Sudoku? Posiblemente hoy haya mucha gente que puede contestar qué es el Sudoku, pero lo que es seguro es que hace dos años nadie tenía idea de que habría de transformarse en el "furor" en términos de pasatiempo y juegos de lógica. De hecho, muchísimos diarios y revistas, no sólo en la Argentina sino en todo el mundo, llenan sus páginas con este juego originado en Japón, y que tiene "atrapada" a buena parte de la población que busca en crucigramas, rompecabezas y pasatiempos de diversa índole una manera de darle "chicle" al cerebro para mascar.

Para aquellos que nunca escucharon hablar del Sudoku, las reglas son bien simples y fácilmente comprensibles.

El Sudoku es como un crucigrama donde aparece un "cuadrado grande" de 9 filas por 9 columnas –es decir, 81 casilleros–, que está dividido a su vez en 9 subcuadrados de 3 . 3:

8		1		2	6			
	7	3		1				9
	4	9					5	2
	6				8	4		
9	3		2		1		7	8
		5	7				3	
5	2					6	8	
4				7		3	1	
			6	5		9		7

Hay que llenar cada subcuadrado con los nueve dígitos que van del 1 hasta el 9, es decir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Eso sí: no puede aparecer ningún dígito repetido ni en la misma fila ni la misma columna del cuadrado grande. Ésas son las reglas, fáciles y sencillas.

Como dato adicional, ya vienen "de fábrica" algunos números ubicados en sus posiciones. Todo lo que hay que hacer es completar las casillas restantes.

Como suele suceder ahora, Internet está repleto de variaciones del juego. Su aparición rompió con los moldes de los viejos crucigramas o juegos de palabras tradicionales, pero lo interesante es que, si bien hay números involucrados (los dígitos del 1 al 9 repartidos múltiples veces en las casillas), pocos deben creer que están usando y haciendo matemática cuando resuelven uno de los problemas. Más aún: como hay muchísimos maestros y profesores de matemática del país que andan a la búsqueda de nuevos estímulos para sus estudiantes, creo que el Sudoku permite formular ciertas preguntas –no todas de fácil respuesta– que funcionen como disparadores de un trabajo interactivo entre docentes y alumnos.

Las que siguen son sólo algunas de esas preguntas. Eso sí: uno puede jugar al Sudoku sin tener que contestar ninguna, y vivir feliz. Pero también es cierto que uno puede hacerse las preguntas y ser feliz aun sin encontrar las respuestas, y ni qué hablar si las encuentra.

El nombre Sudoku

De acuerdo con datos extraídos de *Wikipedia* (la enciclopedia gratuita que figura en Internet), que fueron corroborados por otras fuentes, Sudoku proviene del japonés *Suuji wa dokushin ni kagiru*, que significa: "los dígitos tienen que quedar *solteros*", o "libres", y es una marca registrada de la editorial japonesa Nikoli Co. Ltd.

¿Desde cuándo existe el Sudoku?

Hay distintas versiones, pero la más aceptada es que apareció por primera vez en una revista en Japón, en 1984. El Sudoku debe toda su popularidad a Wayne Gould, un juez que se jubiló en Hong Kong y que luego de conocer el juego en Tokio, escribió un programa de computadora que automáticamente *generaba* distintos Sudokus con qué entretenerse. Luego se dio cuenta de que, quizás, había descubierto una mina de oro y comenzó a ofrecerlo a distintos diarios europeos. Lo curioso es que recién en 2004 (hace sólo *dos años*) uno de los periódicos más importantes de Inglaterra, el *Times,* que se publica en Londres, aceptó la propuesta de Gould, y su competidor, el no menos famoso *Daily Telegraph* lo siguió inmediatamente en enero del 2005. A partir de ahí, explotó en el resto del mundo, incluso en la Argentina.

Hoy, el juego causa *furor* en múltiples diarios, revistas y libros especialmente publicados con variantes sorprendentes, versiones más fáciles, otras más complicadas, con diferentes grados de dificultad. Es común ver gente en los colectivos, trenes y estaciones de subte, ensimismada y pensativa, como "ausente", jugando con algún ejemplar del Sudoku.

La matemática

Como decía, uno puede sentarse y jugar al Sudoku, entretenerse con él y nada más. Y de hecho eso es lo que hace la mayoría. Pero, al mismo tiempo, lo invito a pensar algunas posibles preguntas alrededor del Sudoku:

a) ¿Cuántos juegos de Sudoku *posibles* hay?
b) ¿Se terminarán en algún momento?
c) ¿Alcanzará para entretener a esta generación? O, en todo caso, ¿cuándo empezarán a repetirse?
d) La solución a la que uno llega (*cuando* llega a alguna), ¿es única?
e) ¿Cuántos numeritos tienen que venir "de fábrica" para que la respuesta sea única? (Es decir, cuántas casillas tienen que estar completas de entrada, para que uno pueda empezar a jugar con confianza de que el problema tendrá una única solución?
f) ¿Hay un *número mínimo* de datos que deben darnos? ¿Y un número máximo?

g) ¿Hay algún método para resolverlos?
h) ¿Se pueden hacer Sudokus de otros tamaños? ¿Cuántos habrá de 4 . 4? ¿Y de 16 . 16?
i) ¿Se podrán inventar Sudokus de 7 . 7? ¿Y de 13 . 13? En todo caso, ¿cuadrados de cuántas filas y columnas se pueden considerar?

En fin, hay muchísimas preguntas que uno puede formularse, y estoy seguro de que mientras usted leía éstas, pensó en otras que quizá le interesen más. En realidad, eso es lo único que importa.

Con todo, quisiera aportar algunas respuestas, a las que se puede acceder en cualquier libro que se especialice en este pasatiempo japonés, o bien en Internet, o incluso en la famosa revista *Scientific American*, que le dedicó una nota de varias páginas en la edición de junio de 2006.

Algunos datos sobre el Sudoku

Antes que nada, voy a proponerle algunas reflexiones.

Suponga que tiene resuelto uno de los Sudoku y decide cambiar dos números de posición. Por ejemplo: cada vez que aparece un número 1, lo cambia por un 8. Y al revés lo mismo, es decir, cada vez que aparece un 8 lo cambia por un 1. Obviamente, aunque parezcan dos juegos distintos, serán *el mismo*. Es decir que como juegos son diferentes, pero en esencia sabremos que uno proviene de otro intercambiando un par de números, por lo que cualquier dificultad que tuviera el primero, lo tendrá el segundo. Y viceversa.

Ahora bien: si vamos a calcular todos los Sudokus que hay, a estos dos últimos ¿los contamos dos veces o reconocemos que es el mismo juego con dos "apariencias" diferentes?

Por otro lado, suponiendo que uno tiene resuelto un Sudoku, e intercambia (sólo por poner un ejemplo) las filas uno y tres, ¿cambia el resultado final? ¿Agrega o quita alguna dificultad? ¿Y si uno intercambiara la cuarta y la quinta columnas? ¿Varía en algo el planteo inicial? ¿Se trata, acaso, de dos juegos diferentes? Uno puede decir que sí, que son dos juegos diferentes porque las columnas están cambiadas o los dígitos están intercambiados. Aceptemos esta respuesta. En ese caso, el número de Sudokus que se pueden encontrar (con ayuda de algunas herramientas matemáticas y de lógica y, por supuesto, computadoras rápidas) es:

6.670.903.752.021.072.936.960

Más de 6.670 trillones de juegos posibles.

En cambio, si uno restringe los casos como el planteado, y no considera distintos a los que surgen –por ejemplo– de intercambiar dos dígitos, o dos columnas o dos filas, entonces el número de juegos posibles se reduce muchísimo:

5.472.730.538

Un poco menos de 5.500 millones. Con todo, lo interesante de este número es que, como dice Jean-Paul Delahaye en el artículo publicado por *Scientific American*, es menor que el número de personas que habitamos la Tierra, calculado en más de 6.300 millones.

Con estos datos creo que está claro que es difícil que uno pueda considerar que se van a *acabar* los juegos en esta generación. De hecho, podemos jugar tranquilos sin que corramos el riesgo de *descubrir* alguna de las posibles repeticiones.

Otra de las preguntas pendientes se refiere a la *unicidad* en la respuesta. ¿Qué quiere decir esto? Supongamos que nos dan

un juego de Sudoku, que tiene *repartidos* ciertos dígitos en algunas casillas. Por supuesto, no hay garantía de que esa configuración tenga solución, es decir que podríamos encontrarnos con algunos datos contradictorios. Pero suponiendo que están bien, y que no hay contradicciones, ¿cómo sabemos que la solución que encontramos es la *única* posible?

En realidad, ésa es una muy buena pregunta, porque al haber tantos juegos de Sudoku habrá que recurrir a una computadora para comprobar –en general– si en nuestro caso puede haber más de una solución. Podría ser así. De hecho, usted mismo puede *inventar* un juego que tenga más de una solución. Sin embargo, la *unicidad* de la solución debería ser un requerimiento básico. Porque se supone que si el juego está *bien planteado,* tiene que tener una solución *única.* Ésa es una parte del atractivo del Sudoku, si no, sería como jugar al “bingo”, y cuando uno cree que ganó y grita “¡Bingo!”, hay otro que “gana” junto con usted.

Ahora bien: ¿cuántos números deben venir impresos *antes* de empezar el juego? ¿Los contó alguna vez? ¿Siempre es la misma cantidad? Lo interesante en este aspecto es que el número de *datos* con el que ya viene cada Sudoku varía con cada juego. No hay un número predeterminado que sea el correcto. No obstante, como podrá intuir, *algunos números tienen* que aparecer porque, en el caso extremo, si no hubiera ninguno habría muchísimos resultados posibles. Ni bien se coloca *un* dígito, disminuye la cantidad de respuestas, y al agregar cada vez más, se irán restringiendo las soluciones en forma proporcional, hasta llegar a un número de datos que *garantice* una *solución única.*

Otro problema es el de la *minimalidad*, es decir, ¿cuál es el número *mínimo* de datos que deben figurar para que haya *una única solución*? Hasta hoy el problema no tiene respuesta. La conjetura más aceptada es que hacen falta 17. Hay varios matemáticos en el mundo *pensando y discutiendo* el caso, y uno de ellos, el irlandés Gary McGuire, de la Universidad Nacional de Irlanda (Maynooth), lidera un proyecto que trata de probar que hay ejemplos de Sudoku que con 16 datos garantizan una solución única. Hasta acá, según él mismo reconoció, ha fallado en el intento, por lo que el 17 sigue siendo el número aceptado.

Existen muchas preguntas *abiertas* –sin respuesta– aún hoy, y hay varios casos más sencillos que se pueden atacar (con un tablero de 4 . 4, por ejemplo). Lo que creo interesante es mostrar cómo un juego inocente y que sólo parece un pasatiempo, tiene mucha matemática detrás.

ALGUNAS REFERENCIAS:
http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku
http://sudoku.com.au/
http://www.dailysudoku.com/sudoku/index.shtml
http://www.daily-sudoku.com/
http://www.sudoku.com/howtosolve.htm

Criba de Eratóstenes

Eratóstenes (257-195 a.C.) nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de África. Fue el primero en calcular, con precisión sorprendente para la época, el diámetro de la Tierra (nunca voy a entender por qué se le atribuye a Colón el haber "descubierto" que la Tierra era "redonda" o esférica, cuando eso ya se sabía desde más de *quince siglos* atrás).

Por varias décadas, Eratóstenes fue director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue una de las personas más reconocidas de su tiempo, y lamentablemente sólo unos pocos fragmentos de lo que escribió sobrevivieron hasta nuestros días. Eratóstenes murió en una huelga voluntaria de hambre, inducido por la ceguera, que lo desesperaba. Aquí deseo presentar uno de sus famosos desarrollos: la llamada "Criba de Eratóstenes".

Sabemos que un *número primo* (positivo) es aquel número entero que *sólo es divisible por sí mismo y por 1* (explícitamente se excluye al número 1 de la definición). Lo que hizo Eratóstenes fue diseñar un algoritmo que le permitiera encontrar *todos los números primos.* Veamos qué es lo que hizo.

Escribamos los primeros 150 números:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Eratóstenes empezó a recorrer la lista. El 1 no lo consideró, porque sabía que no era primo, de modo que el primer número con el que se encontró fue el *2.* Lo que hizo entonces fue *dejar el 2* y *tachar* todos sus múltiplos. Y le quedó una lista como ésta:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
111	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	123	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	129	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	135	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
141	~~142~~	143	~~144~~	145	~~146~~	147	~~148~~	149	~~150~~

Una vez que *tachó todos los múltiplos de 2,* siguió con la lista. Fue hasta el primer número sin tachar y se encontró con el 3. Lo dejó así, sin tachar, y eliminó *todos sus múltiplos.* La tabla quedó de esta manera:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	145	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Después, siguió. Como el 4 ya estaba tachado, avanzó hasta el primer número sin tachar y se encontró con el 5. Dejó el 5 y continuó con el proceso anterior, tachando todos sus múltiplos. De esa forma, quedaron eliminados *todos los múltiplos de 5.* Y la tabla quedó así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Luego siguió con el 7, y tachó todos sus múltiplos. Después avanzó hasta el primer número sin tachar, y encontró el 11. Lo dejó, y tachó todos sus múltiplos. Siguió hasta el siguiente número no tachado, y se encontró con el 13. Luego, tachó todos sus múltiplos, y continuó con el mismo ejercicio hasta completar la tabla.

Finalmente, los números que no estaban tachados no eran múltiplos de ningún número anterior. En realidad, lo que estaba haciendo era construir una suerte de "filtro" por el cual, al hacer pasar todos los números, sólo quedaban los primos.

Y la tabla quedaba (al menos, en los primeros 150 lugares) así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Con este método sencillo pero muy efectivo, Eratóstenes construyó su famosa "criba". Los números que lograban sortear el filtro eran los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 121, 127, 131, 133, 137, 139, 143, 149…

Sabemos que los primos son infinitos, pero todavía hay muchas preguntas respecto de ellos. Con todo, la criba de Eratóstenes fue el primer método o algoritmo que se conoció para identificarlos.[6] Aún hoy es la forma más efectiva para detectar los

[6] Obviamente no los encuentra a *todos* porque los primos son infinitos, pero

números primos más pequeños (digamos, los menores de 10 millones).

Aunque sea nada más que por este aporte a la Teoría de números y por lo que hizo con un grado de eficiencia notable para la época al determinar que la Tierra era redonda, se merece un lugar en la Historia.

Números perfectos

Los números enteros son una usina generadora de problemas interesantes. Y muchos de ellos siguen *abiertos,* en el sentido de que aún no se conoce su solución. Aquí voy a exponer uno de esos problemas.

Pitágoras y sus discípulos creían que los números contenían *la esencia* de todo, y les ponían género también. Por ejemplo, decían que los números *pares* eran *femeninos.* En esta oportunidad, me voy a ocupar de los que llamaron *números perfectos.*

Antes que nada, los números que voy a usar en este tramo son los que se denominan números *naturales,* los que uno conoce porque los *usamos* todos los días: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., etcétera.

Tomemos ahora un número natural cualquiera, digamos el 12. ¿Cuántos números lo dividen exactamente? Es decir, ¿en cuántas partes se puede dividir el 12 sin que sobre nada?

La respuesta es (espero que lo haya resuelto solo antes):

1, 2, 3, 4, 6 y 12

lo que asegura este proceso es que uno puede determinar *todos los primos menores que un número dado,* o bien decidir si un número cualquiera es primo o no.

Si divido 12 por el número 1, obtengo 12 y no sobra nada. Si divido 12 por 2, obtengo 6 y no sobra nada. Si divido 12 por 3, obtengo 4 y no sobra nada. Si divido 12 por 4, obtengo 3 y no sobra nada…

Pero si dividiera el número 12 por 5, el resultado no sería un número natural, sino 2,4. En este sentido, podemos decir que el número 12 no es *divisible exactamente* por 5, pero sí por 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Justamente, estos números son los *divisores* del 12.[7]

Ya sabemos entonces cuáles son los *divisores* de un número natural. Como se dará cuenta, el número 1 es siempre *divisor* de cualquier número. Y también es cierto que *el propio número* es *siempre* divisor de sí mismo.

Ahora bien. Volvamos al número 6. ¿Qué divisores tenía? Como vimos:

1, 2, 3 y 6

Si lo excluimos al propio número, es decir, si excluimos al 6, entonces los divisores son: 1, 2 y 3. A éstos se los llama *divisores propios*.

Si los *sumamos* obtenemos:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Es decir que *si uno suma los divisores propios*, en este caso obtiene *el número de partida.*

Tomemos otro ejemplo; el número 10.

Los divisores propios del 10 (es decir, los que no lo incluyen) son:

[7] Una definición más precisa es la siguiente: “El número natural *d* es un *divisor* del número natural *n,* si existe un número natural *q* tal que: n = d . q”.

1, 2 y 5

Si uno los suma:

1 + 2 + 5 = 8

en este caso, la suma de los divisores *no* permite obtener el número original.

Tomemos otro número. Los divisores propios del 12:

1, 2, 3, 4 y 6

Si uno los suma, tiene:

1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16

Otra vez se obtiene un número *distinto* del de partida. La suma de los divisores *no reproduce* el número original.

Cabe entonces preguntarse si es el 6 el único ejemplo, o si hay otros. A los números que, como el 6, cumplen con la propiedad de que la suma de sus divisores propios reproduce el número original, se los llama *perfectos*.

El número 6 que encontramos, ¿habrá sido una casualidad? ¿Será el único? (Invito al lector a seguir *probando* solo. Busque otros números perfectos.)

Analicemos ahora el número 28. El 28 tiene como divisores (excluyéndolo a él mismo) a:

1, 2, 4, 7, 14

Y la suma da:

1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28

Luego, el 28 ¡es un número perfecto!

Por fortuna, entonces, el 6 no es el único. En todo caso, es el primer número perfecto entre los naturales. Ya sabemos que hay otro más: el 28, entre ellos.

Lo invito a descubrir que ningún número entre 6 y 28 es perfecto. Es decir, el número 28 es el *segundo* número perfecto.

Acá aparecen algunas preguntas que son naturales:

- ¿Habrá un tercero?
- Si lo hay, ¿cuál es?
- ¿Cuántos números perfectos hay?
- ¿Hay alguna manera de encontrar *todos* los números perfectos?

Ahora, algunas respuestas. Y digo *algunas* no sólo porque en este texto no cabrían todas (ni mucho menos), sino porque hay algunas respuestas que aún no se conocen.

Avancemos un poco más.

El número 496 tiene como *divisores propios* a:

1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 y 248

Luego, si uno los suma, obtiene:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496

Hemos descubierto otro número perfecto: ¡el 496!

Un par de cosas más. Se sabe (y usted puede confirmarlo haciendo las cuentas pertinentes) que entre el 28 y el 496 no hay ningún otro número perfecto. Es decir que el 496 es el tercer número perfecto que aparece. Eso sí: hay que "caminar" bastante, para encontrar el cuarto... El número 8.128 es *perfecto* también. Las comprobaciones no son difíciles de hacer pero hace falta tener paciencia y una calculadora a mano.

$$8.128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1.016 + 2.032 + 4.064$$

Hasta acá sabemos, entonces, que los primeros números perfectos son 6, 28, 496 y 8.128.

Otros datos interesantes:

a) un manuscrito del año 1456 (¡!) determinó que el 33.550.336 es el *quinto* número perfecto.
b) Hasta hoy, octubre de 2006, no se conocen números perfectos que sean *impares.*
c) El número perfecto *más grande* que se conoce es: $2^{32582657} . (2^{32582657} - 1)$

Los griegos estuvieron siempre preocupados y dedicados a *descubrir* números perfectos, y también escribieron mucho sobre ellos. En el último volumen del libro *Elementos*, de Euclides (el más leído después de la Biblia), se encuentra la siguiente afirmación:

Si n es un número *entero positivo* y $(2^n - 1)$ es primo, entonces el número

$$2^{(n-1)} . (2^n - 1)*$$

es perfecto.

Por ejemplo:

Para $n = 2$, se obtiene:

$$2^{(2-1)} . (2^2 - 1) = 2 . 3 = 6$$

Para n = 3, se obtiene:

$$2^{(3-1)} . (2^3 - 1) = 4 . 7 = 28$$

Para n = 5, se obtiene:

$$2^{(5-1)} . (2^5 - 1) = 496$$

Esto es muy interesante, porque quiere decir que Euclides encontró una manera de *descubrir* los números *perfectos.*

Para $n = 7$, se obtiene:

$$2^{(7-1)} . (2^7 - 1) = 64 . 127 = 8.128$$

Uno siente la tentación de probar ahora con el próximo *primo,* el que le sigue a 7. Es decir, la tentación de intentarlo para $n = 11$:

$$2^{(11-1)} . (2^{11} - 1) = 2.096.128$$

Y este número *no es perfecto.*

* Uno de los matemáticos más grandes de la historia, el suizo Leonhard Euler (1707-1783), demostró que *todos los números perfectos pares* son los de esta forma.

El problema radica en que el número $(2^{11} - 1) = 2.047$ ¡no es primo!

En realidad, 2.047 = 89 . 23.

Luego, el hecho que 2.096.128 *no sea perfecto* no vulnera lo que había dicho Euclides. Sin embargo, vale la pena seguir un poco más.

Si uno aplica la fórmula *al siguiente primo*, o sea, *el número 13,* se obtiene:

$$2^{(13-1)} \, . \, (2^{13} - 1) = 33.550.336$$

y este número sí es perfecto.

Marin Mersenne es un matemático francés que probó en 1644 que los primeros trece números perfectos son de la forma que acabamos de ver para

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127 \text{ y } 157$$

En resumen:

a) Los *primeros números perfectos* son:
6, 28, 496, 8.128, 33.550.336, 8.589.869.056, 137.438.691.328, 2.305.843.008.139.952.128
Con la ayuda de computadoras, se encontraron números perfectos para los siguientes *n*: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1.279, 2.203, 2.281, 3.217, 4.253, 4.423, 9.689, 9.941, 11.213, 19.937, 21.701, 23.209, 44.497, 86.243, 110.503, 132.049, 216.091, 756.839, 859.433, 1.257.787 y 1.398.269.

b) Dado cualquier número *n,* si $(2^n - 1)$ es primo, entonces el número $2^{(n-1)} \, . \, (2^n - 1)$ es perfecto.

c) La fórmula anterior provee todos los números perfectos *pares.*

d) Hasta hoy no se conocen números perfectos *impares.* ¿Habrá?
Se han probado con *todos* los números hasta 10^{300}, es decir, un 1 con trescientos ceros después y no se encontró ningún número perfecto impar. Se duda de que existan, pero aún no hay una demostración.

e) ¿Habrá infinitos números perfectos?
La bibliografía en este tema es amplísima. Este capítulo sólo estuvo dedicado a la presentación en sociedad de los números perfectos. Y para mostrar que la matemática tiene aún muchísimos problemas abiertos. Éste es sólo uno de ellos.

La vida en el infinito. Serie geométrica y armónica

¿Es posible sumar "infinitos" números positivos y que el resultado sea un número (no infinito)? Naturalmente, la primera reacción es decir: "No. No se puede. Si uno pudiera sumar infinitos números positivos, el resultado crecería constantemente y, por lo tanto, si siguiera sumando números indefinidamente *debería 'llegar' a infinito".*

Por supuesto, hay algunos aspectos de esta frase que son ciertos. Es decir, si uno empieza a sumar números positivos, a medida que agregue más y más, el número obtenido será cada vez más grande. Eso es cierto. Ahora bien, lo que intento poner en duda es: ¿qué quiero decir con "si siguiera sumando números indefinidamente *debería 'llegar' a infinito*"?

Ya hemos visto en *Matemática... ¿Estás ahí?* (p. 89) que la "suma infinita" de las inversas de las potencias de 2 da como resultado el número 2. Esa "suma infinita" es la suma de la serie geométrica, de razón (1/2), por la que se obtiene el número 2. Ahora, ¿qué pasaría si uno hiciera cada una de estas sumas "en forma parcial"?

Supongamos que uno va "sumando *de a poco*". Empieza con un solo término, luego suma dos, luego tres, luego cuatro, luego cinco... etcétera. Obviamente, cada una de estas sumas producirá un número, que llamaré S_n. Es decir, llamaré S_1 cuando sume un solo número; S_2 cuando sume dos; S_3 cuando sume tres, y así sucesivamente hasta *producir* una tabla como la que sigue:

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 1/2 = 1,5$
$S_3 = 1 + 1/2 + 1/3 = 1,833333...$
$S_4 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 2,08333333...$
$S_5 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 = 2,2833333...$
$S_6 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 2,45$
$S_7 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 = 2,59285714285714...$
$S_8 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 = 2,71785714285714...$

Es decir que a medida que vamos agregando más números, los valores de S_n se hacen cada vez más grandes. La pregunta es: estos números S_n ¿crecen indefinidamente? ¿Se hacen tan grandes como uno quiera?

En el ejemplo que presenté en *Matemática... ¿Estás ahí?* vimos que al sumar parcialmente los términos, las sumas eran

cada vez mayores, pero *nunca superaban el número 2*. Ahí mostré también otra sucesión (la de la suma de las inversas de las potencias de 2):

$A_0 = 1 = 1 = 2 - 1$
$A_1 = 1 + 1/2 = 3/2 = 2 - 1/2$
$A_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 = 2 - 1/4$
$A_3 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 15/8 = 2 - 1/8$
$A_4 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 31/16 = 2 - 1/16$
$A_5 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 = 63/32 = 2 - 1/32$
$A_6 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 = 127/64 = 2 - 1/64$

Como puede ver, si bien los elementos de esta sucesión A_n son cada vez más grandes a medida que crece el subíndice *n*, ninguno de ellos superará la barrera del número 2. Es decir que a medida que el subíndice *n* es cada vez más grande, el *valor correspondiente de* A_n *es también mayor.* Esto se indica (en la jerga matemática) diciendo que la sucesión A_n es una sucesión *estrictamente creciente.* Concluimos entonces: crece sí, pero *está acotada por el número 2.*

En el ejemplo que analizamos ahora, las sumas son cada vez mayores también, pero lo que no queda claro es si hay una *barrera o límite* (como antes sucedía con el número 2) que no puedan superar. Hemos construido entonces lo que se llama una *sucesión* (S_n) de números reales, de manera tal que a medida que el subíndice *n* crece, el valor de S_n también lo hace. La pregunta es si los números S_n crecen indefinidamente.

Pensémoslo de la siguiente manera: si *no* crecieran indefinidamente querría decir que hay alguna *pared* que no podrán superar. No importa cuán grande sea el subíndice *n*, habría una barrera que no podría atravesar. (Por ejemplo, en el caso de la suma de las inversas de las potencias de 2, vimos que el *número 2* es una pared que no se puede "atravesar" por más que el subíndice sea tan grande como uno quiera.)

Miremos algunos términos de la sucesión:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 1/2$$
$$S_4 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4)$$

Puse entre paréntesis los últimos dos sumandos a propósito, porque si uno *mira lo que quedó entre paréntesis,* el número:

$$1/3 > 1/4$$

Luego:

$$(1/3 + 1/4) > (1/4 + 1/4) = 2/4 = 1/2 \ ^{(*)}$$

Acabamos de mostrar entonces que:

$$S_4 > 1 + 1/2 + 1/2 = 1 + 2\ .\ (1/2) \ ^{(**)}$$

Miremos ahora lo que pasa con S_8:

$$S_8 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$$

A propósito, volví a poner entre paréntesis algunos sumandos, para que hagamos juntos algunas consideraciones. El primer paréntesis (1/3 + 1/4), ya vimos en (*) que es *mayor* que (1/2). Ahora, miremos el segundo paréntesis:

$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$$

Como:

$$1/5 > 1/8$$
$$1/6 > 1/8$$
$$1/7 > 1/8$$

Entonces:

$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) > (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8)$$

Es decir:

$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) > 4 \text{ veces } (1/8)$$
$$= 4.\ (1/8) = 1/2$$

Hemos descubierto que el segundo paréntesis es también mayor que (1/2). Y éste es un punto importante, porque con estos datos sabemos ahora que

$$S_8 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$$
$$> 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 1 + 3\ (1/2) \ ^{(***)}$$

De la misma forma, ahora miremos el término S_{16}

$$S_{16} = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) \ ^{(****)}$$

Una vez más –como hice más arriba– agrupé entre paréntesis algunos términos. En este caso, la diferencia con S_8 es que ahora se agregaron los últimos *ocho sumandos que figuran dentro del tercer paréntesis.* Lo interesante aquí es notar que:

$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) >$$
$$(1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16) =$$
$$= (8 \text{ veces el número } 1/16) = 8 \,.\, (1/16) = 1/2$$

Es decir, "mirando" el renglón (****) podemos concluir que:

$$S_{16} = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) >$$
$$1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 1 + 4 \,.\, (1/2)$$

Resumo lo que hemos visto hasta aquí, y lo invito a pensar conmigo qué conclusiones podríamos sacar:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 1/2$$
$$S_4 > 1 + 2 \,.\, (1/2)$$
$$S_8 > 1 + 3 \,.\, (1/2)$$
$$S_{16} > 1 + 4 \,.\, (1/2)$$

Si uno siguiera con este procedimiento, descubriría, por ejemplo, que

$$S_{32} > 1 + 5 \,.\, (1/2)$$
$$S_{64} > 1 + 6 \,.\, (1/2)$$
$$S_{128} > 1 + 7 \,.\, (1/2)$$

Quiere decir: a medida que crece el subíndice n en S_n, la sucesión S_n es cada vez más grande que la sucesión $(1 + n \,.\, (1/2))$.

En realidad, la desigualdad que uno debe escribir es:

$$S(_2{}^n) > (1 + n \,.\, (1/2)) \qquad (1)$$

Luego, como la sucesión en el término de la derecha de (1) *tiende a infinito,* es decir, se hace arbitrariamente grande, y la sucesión S_n es más grande aún, entonces se concluye que la sucesión S_n *también tiende a infinito.* En otras palabras, si una sucesión de números es mayor, término a término, que otra, y ésta *tiende a infinito*, entonces la primera, con más razón, tiende a infinito.

En conclusión, si uno *pudiera sumar indefinidamente*

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots + 1/n + 1/(n+1) + \ldots$$

esta suma *tenderá a infinito* o, lo que es lo mismo, *superará cualquier barrera que le pongamos.*

A la serie S_n se la conoce con el nombre de *serie armónica.*

NOTAS ADICIONALES:

a) Si bien la serie armónica *diverge* (o sea, tiende a infinito), hay que sumar 83 términos para que supere la barrera del 5. Dicho de otra manera, recién:

$$S_{83} > 5$$

b) Además, hay que sumar 227 términos para superar el número 6.

c) Recién el término:

$$S_{12367} > 10$$

d) Y hay que sumar 250 millones de términos para superar el número 20.

e) En 1689 apareció en el "Tratado en series infinitas", de Jakob Bernoulli, la primera demostración de que la serie armónica era divergente. Este texto fue reimpreso en 1713. Hay una réplica del original en la biblioteca de la Universidad del estado de Ohio (Estados Unidos). Si bien Jakob escribió que la prueba se la debía a su hermano Johann Bernoulli, en realidad la primera demostración apareció publicada alrededor de 1350, cuando la matemática Nicole Oresme (1323-1382), en un libro titulado *Cuestiones sobre la geometría de Euclides*, escribió la demostración más clásica de este hecho, que es la que se usa hoy. La otra demostración se debe al matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686), quien en 1647 se adelantó a la demostración de Bernoulli unos cuarenta años.

Primos en progresión aritmética

Supongamos que escribo esta sucesión de números (al menos, los primeros términos):

{1, 2, 3, 4, 5, ..., 10, 11, 12, ... }
{1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 23, 25, 27, 29, ...}
{2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 124, 126, 128, ...}
{7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., 43, 46, 49, ...}
{7, 17, 27, 37, 47, ..., 107, 117, 127, ...}
{5, 16, 27, 38, 49, ..., 126, 137, 148, 159, ...}

Le propongo que descubra cómo seguir en cada caso. Hágalo sola/o porque es mucho más entretenido que leer la solución.

De todas formas, la primera sucesión es trivial, porque es la sucesión de *todos* los números naturales. Cada término se obtiene del anterior *sumando 1*.

{1, 2, 3, 4, 5, ..., 10, 11, 12, ... }

La segunda son los impares, y cada término se obtiene *sumando 2* al anterior. Claro: uno empieza con el número 1, pero esto no es necesario. Podríamos haber comenzado en cualquier número.

{1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 23, 25, 27, 29, ...}

De hecho, la tercera sucesión:

{2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 124, 126, 128, ...}

cumple con la misma regla: cada término se obtiene del anterior, *sumando 2.*

En la siguiente sucesión:

{7, 10, 13, 16, 19, 22, ..., 43, 46, 49, ...}

cada término se obtiene del anterior *sumando 3.* Importa también decir en qué número uno empieza: en este caso, en el *7.*

La que aparece después:

{7, 17, 27, 37, 47, ..., 107, 117, 127, ...}

tiene la particularidad de que cada término se obtiene del anterior *sumando 10,* y también, como en la anterior, el primer término es 7.

En la última sucesión:

{5, 16, 27, 38, 49, …, 126, 137, 148, 159, …}

cada término se obtiene del anterior *sumando 11,* y el primer término es 5.

Todas estas sucesiones tienen muchas cosas en común, pero la más importante, la que las *define,* es que, sabiendo cuál es el primer término y cuál es el número que hay que sumarle (llamado la *razón*), el resto es fácil de deducir.

Estas sucesiones se dice que cumplen *una progresión aritmética.*

{1, 2, 3, 4, 5, …, 10, 11, 12, … }: el primer término es 1 y la razón es 1.
{1, 3, 5, 7, 9, 11, …, 23, 25, 27, 29, …}: el primer término es 1 y la razón es 2.
{2, 4, 6, 8, 10, 12, …, 124, 126, 128, …}: el primer término es 2 y la razón es 2.
{7, 10, 13, 16, 19, 22, …, 43, 46, 49, …}: el primer término es 7 y la razón es 3.
{7, 17, 27, 37, 47, …, 107, 117, 127, …}: el primer término es 7 y la razón es 10.
{5, 16, 27, 38, 49, …, 126, 137, 148, 159, …}: el primer término es 5 y la razón es 11.

Obviamente, usted puede agregar los ejemplos que quiera, pero creo que los que di son suficientes. Dicho esto, le voy a plantear un problema que tuvo (y aún tiene) a los especialistas en Teoría de Números ocupados durante muchísimos años.

Mire este ejemplo:

{5, 17, 29, 41, 53}

Esta sucesión,[8] a diferencia de las anteriores, *termina.* Tiene sólo *cinco términos.* Sin embargo, podemos decir que el primero es 5 y que la razón es 12. Termina ahí porque otra particularidad que tiene es que ¡son todos primos! El próximo número que deberíamos poner es… 65, pero el problema es que 65 *no es primo* (65 = 13 . 5). Luego, si queremos pedir que la sucesión esté compuesta sólo por números primos, *tiene* que parar ahí, porque el número que debería seguir ya no es primo.

Busquemos otra:

{199, 409, 619, 829, 1.039, 1.249, 1.459, 1.669, 1.879, 2.089}

Ésta es una sucesión que tiene como primer término a 199, y como razón 210. Como antes, todos los números que figuran en esta sucesión son primos. Está compuesta por sólo *diez términos,* porque el siguiente, 2.299, ¡no es primo! (2.299 = 209 . 11).

Como podrá advertir, entonces, uno está a la búsqueda de sucesiones en *progresión aritmética* de manera tal que todos los términos sean números primos.

[8] En realidad, estoy haciendo abuso de la palabra *sucesión* porque al principio de esta sección las sucesiones "no terminaban" y ahora sí. Pero creo que la idea general se entiende. Los números {5, 17, 29, 41, 53} conforman el *principio* de una sucesión, que tiene (obviamente) *muchas* maneras de continuar. Por ejemplo, podría seguir así: {5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89, 101, 113, 125, …}, donde cada término resulta de sumar 12 al anterior, y uno empieza con el 5. Dicho de otra manera, es la sucesión que empieza en 5 y que tiene razón 12.

Pero también, podríamos continuarla así: {5, 17, 29, 41, 53, 5, 17, 29, 41, 53, 5, 17, 29, 41, 53, 5, 17, …}. Es decir, podría ser la sucesión que repite constantemente sus *cinco primeros términos.* De hecho, no hay una *única manera* de continuar una sucesión cuando se conocen sólo algunos términos: hay infinitas. Por eso, me imagino que usted podría agregar muchísimas más.

Como vimos más arriba, hay una sucesión de *cinco* primos en progresión aritmética, y otra sucesión de *diez* primos también en progresión aritmética.

Hasta hoy (noviembre de 2006), la sucesión más larga de primos en progresión aritmética que se conoce es de veintidós (22) términos. En realidad, se encontraron *dos de estas sucesiones.* La primera, es la que empieza en el número:

11.410.337.850.553

Es decir que este último es el primer término, y la *razón es:*

4.609.098.694.200

La otra, tiene como primer término a:

376.859.931.192.959

Y la razón es:

18.549.279.769.020

La pregunta que tuvo ocupados a los especialistas en el tema durante muchos años fue si existen sucesiones de primos en progresión aritmética de cualquier longitud. Hasta 2004 la pregunta no tenía respuesta, y debería decir que aún hoy no la tiene, pero señalo la particularidad de que en el trabajo conjunto publicado en 2004, Green y Tao usaron un resultado que todavía no tiene la certificación de los árbitros que lo evalúan, y que permitiría probar que *sí* existen progresiones aritméticas de primos de cualquier longitud. Sin embargo, hasta ahora, las de mayor

"largo" que se conocen son las dos que escribí más arriba, de veintidós (22) términos cada una.

Luces encendidas, luces apagadas y modelos

¿Qué quiere decir *modelar*? Sí, ya sé: hacer un modelo. Pero, ¿cómo se puede aplicar la matemática para resolver un problema práctico? Es decir: uno tiene un problema cualquiera, se sienta a pensarlo y no se le ocurre cómo atacarlo. Algunas veces uno es capaz de convertirlo en algo que sea más sencillo, que sirva para transformarlo en algo con lo que se sienta más cómodo para trabajar; quizás en eso resida la vuelta para dar con la solución.

Supongamos que uno tiene un tablero con cierta cantidad de lámparas. Cada lámpara tiene una ubicación *numerada* en el tablero. Además, cada lámpara puede estar encendida o apagada. La pregunta es: ¿de cuántas maneras diferentes pueden estar encendidas o apagadas las luces? Es decir, ¿cuántas configuraciones distintas puede tener el tablero?

Si el tablero consistiera de una sola lámpara, entonces, hay dos configuraciones posibles: o bien la luz está encendida, o está apagada. Y aquí empieza la *modelación*, es decir, quiero empezar a construir un *modelo,* algo que nos ayude a pensar el problema más fácilmente.

Marquemos con un 0 si la única luz está apagada y con un 1 si está encendida:

Apagada	0
Encendida	1

Si uno tiene dos luces en el tablero, numeradas, entonces, ¿cuántas configuraciones posibles hay?

Apagada-Apagada	o sea, 00
Apagada-Encendida	o sea, 01
Encendida-Apagada	o sea, 10
Encendida-Encendida	o sea, 11

Luego, se tienen *cuatro* posibles configuraciones:

00, 01, 10 y 11

Si ahora tuviéramos *tres luces numeradas* en el tablero, tendríamos:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111 (*)

donde cada número 0 indica que la luz correspondiente está apagada y cada número 1, que está encendida.

Por lo tanto, se tienen *ocho configuraciones posibles.*

En resumen:

1 luz	$2 = 2^1$ configuraciones
2 luces	$4 = 2^2$ configuraciones
3 luces	$8 = 2^3$ configuraciones

Antes de avanzar, lo invito a pensar qué pasa cuando uno tiene *cuatro* lámparas numeradas en el tablero. En lugar de *escribir* la solución, lo que pretendo es pensar una manera de avanzar que nos sirva para *todos* los posibles casos que vengan después. Es decir, poder *contar* cuántas configuraciones posibles se pueden tener, *sin* tener que *listarlas* todas.

Si tuviéramos cuatro lámparas, supongamos que la cuarta está apagada, es decir que tiene un 0 en el último lugar; entonces, ¿qué puede pasar con las configuraciones para las tres primeras? Esa respuesta ya la tenemos, porque son las que figuran en (*). Es decir, que todo lo que habría que hacer sería agregarles un cero al final a las que allí figuran para tener todas las configuraciones para cuatro lámparas, *con la última apagada.*

Se tiene entonces:

000**0**, 001**0**, 010**0**, 011**0**, 100**0**, 101**0**, 110**0** y 111**0** (**)

Por otro lado, como ya se habrá imaginado, van a aparecer otras ocho configuraciones, que se obtienen de las que había en (*), pero ahora con la última luz encendida. Es decir que terminan en un 1.

Se tiene, entonces:

000**1**, 001**1**, 010**1**, 011**1**, 100**1**, 101**1**, 110**1**, 111**1** (***)

A propósito, resalté el número **0** y el número **1** para que se aprecie que las primeras configuraciones de las tres lámparas corresponden a las que teníamos en (*), pero, mientras que las primeras *ocho* corresponden a las que terminan en 0, las segundas ocho corresponden a las que terminan en 1.

¿Cuál es la moraleja de todo esto? Que cuando uno tenía tres lámparas, había $2^3 = 8$ configuraciones, y ni bien agregamos *una lámpara más,* hubo que multiplicar por **2** lo que había antes (porque corresponde a agregar un **0** o un **1** al final). Es decir que cuando se tienen cuatro lámparas, el número de configuraciones posibles va a ser el doble de las que había con tres lámparas (como este número era $2^3 = 8$, ahora hay *dos veces esas posibles configuraciones,* o sea: $2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4 = 16$).

Creo que ahora se entenderá por qué, si uno tiene un tablero con *cinco lámparas,* tendrá:

$$2 \cdot 2^4 = 2^5 = 32$$

configuraciones, y así sucesivamente. De modo que, si uno tiene *n* lámparas, el número de configuraciones es 2^n.

Por otro lado, la modelización en ceros y unos nos permite pensar en tiras con estos números, en lugar de tener un tablero con lámparas.

Una aplicación muy interesante (y muy útil)

Para avanzar con el tema de la modelización, voy a mostrar otra manera de usar el problema anterior (de las tiras de ceros y unos).

Supongamos que ahora uno tiene una bolsa con cuatro objetos: un reloj, una calculadora, un libro y una lapicera. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar regalos para hacer? O sea, regalos que consistan en *un solo objeto,* en *dos* objetos, en *tres* objetos o los *cuatro objetos* al mismo tiempo. Si usáramos el modelo que teníamos arriba, con las tiras de *unos* y *ceros,* podríamos darle a cada objeto un número. Digamos:

1 = Reloj
2 = Calculadora
3 = Libro
4 = Lapicera

y pensamos ahora que debajo de cada uno de estos objetos, hay un casillero, en principio, vacío.

1 2 3 4

Si figura un número *uno* en el casillero, eso quiere decir que hemos elegido ese regalo. En cambio, si figura un número cero entonces, eso significa que ese regalo no lo hemos elegido.

Por ejemplo, si uno tiene la tira

1010

esto significa, que ha elegido un regalo con dos objetos: el número 1 y el número 3. O sea, el reloj y el libro

La tira

1111

implica que uno ha elegido los cuatro objetos

La tira

0001

indica que uno ha elegido sólo la lapicera. De esta forma, cada tira de éstas, que involucra solamente ceros y unos representa una manera de elegir los objetos. Usando lo que vimos más arriba con las luces del tablero (encendidas o apagadas), todo lo que tenemos que hacer, es *recordar* cuántas de estas tiras hay.

Y ya sabemos, que hay $2^4 = 16$.

Claro, habría que excluir la tira "0000" porque esta implicaría *no hacer ninguna elección.*

Pero lo interesante entonces, es que con esta manera de *modelar,* hemos aprendido a *contar* todas las posibles configuraciones para elegir regalos entre cuatro objetos sin tener que hacer una lista de todos los casos. O lo que es lo mismo, cuántos posibles subconjuntos se pueden formar con cuatro elementos.

Esto que acabamos de hacer con cuatro objetos se puede generalizar, obviamente. En ese caso, si uno tuviera diez objetos y quiere saber cuántos posibles subconjuntos se pueden formar, el resultado será $2^{10} = 1.024$ (si uno incluye como subconjunto al vacío, o sea, no elegir ninguno). Si no, el resultado es $2^{10} - 1 = 1.023$.

En general, si uno tiene un conjunto con *n* elementos, y quiere saber cuántos subconjuntos se pueden formar con él, la respuesta es

$$2^n \text{ subconjuntos,}$$

si uno incluye al subconjunto que es vacío. Si no, la respuesta es

$$2^n - 1$$

Lo que más importa de este capítulo, es que hemos aprendido a *modelar*, al menos en este caso particular, y además, hemos aprendido a contar subconjuntos de un conjunto finito.

¿Cómo cuenta una computadora? (Números binarios)

> Hay diez tipos de personas en el mundo:
> aquellos que entienden el sistema binario,
> y aquellos que no.
> ANÓNIMO

Si una computadora pudiera hablar y uno le pidiera que *contara,* contestaría lo siguiente (lea la lista que sigue y trate de descubrir el *patrón*):

0
1
10
11
100
101
110
111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111 (*)
10000
10001
10010
10011
10100
10101
10110
10111
11000
11001
11010
11011
11100
11101
11110
11111
100000 ...

La primera observación es que los *únicos* dígitos que la computadora usó son el 0 y el 1. ¿Qué más? Usó el 0 y el 1, pero para poder escribir todos los números tiene que ir incrementando la cantidad de veces que los usa. Tiene que usar cada vez números de *más cifras.* Es decir, los primeros dos números que aparecen en la lista son el 0 y el 1, que se corresponden justamente con el 0 y el 1 que usamos nosotros (en la notación que se llama *decimal,* la que utilizamos todos los días). Pero ni bien la computadora quiere llegar al número 2 –y como sólo puede usar ceros y unos–, necesita dos lugares o dos posiciones o números de dos cifras. Por eso, usa

10 y 11

Éstos corresponden, entonces, al número 2 y al número 3 que usamos nosotros en la notación *decimal.* Ahora se le acabaron las posibilidades con los dos dígitos que puede usar (0 y 1) y las dos cifras, de modo que para poder continuar necesita un tercer lugar, o lo que es equivalente a un número de tres cifras. Por eso, empieza con el 100:

100, 101, 110, 111

Y esto le sirve para el 4, 5, 6 y 7.

Y otra vez se le agotaron las posibilidades. Si quiere llegar hasta el *8,* necesita ampliar las cifras. O sea, necesita usar cuatro lugares. Y por eso recurre al:

1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

Con éstos cubrió el:

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15

¿Se entiende?

Hago un paso más: para alcanzar el 16 necesitará de números de cinco cifras. Por eso, si uno revisa la lista (*), advierte que seguirán:

10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111,
11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110 y 11111

¿Qué otros patrones podemos encontrar? Revisemos.

El 0 y el 1 *se representan a sí mismos,* entonces, no hay nada que pensar ahí. Sin embargo, voy escribir un par de cosas más:

a) 10 = 2
b) 100 = 4
c) 1000 = 8
d) 10000 = 16

Si usted sigue con este proceso, descubre que:

e) 100000 = 32
f) 1000000 = 64

Es decir que estamos en condiciones de conjeturar que un *uno* seguido de *ceros,* resulta ser *siempre una potencia de 2.*

$1 = 2^0$
$10 = 2^1$
$100 = 2^2$
$1000 = 2^3$
$10000 = 2^4$

$100000 = 2^5$
$1000000 = 2^6$
$10000000 = 2^7$

y así podríamos seguir.

En general, se dice que la numeración utilizada en la lista (*) es la escritura *en números binarios*. Y se llaman así porque sólo aparecen involucrados dos dígitos: el 0 y el 1.

Ahora bien: si pongo un número cualquiera usando nada más que ceros y unos, ¿cómo se hace para saber a qué número en la numeración decimal corresponde?

Aquí me quiero detener en una observación. Cuando uno escribe –en la numeración decimal– el número

378

está diciendo –en forma abreviada– que hay que sumar

$300 + 70 + 8$

De la misma forma, cuando uno escribe

34695

es como decir que uno ha sumado

$30000 + 4000 + 600 + 90 + 5$

Con esta idea en la cabeza, cuando uno escribe un número utilizando la notación binaria, digamos el número

11010

está indicando que uno suma

$10000 + 1000 + 10$

y de acuerdo con lo que vimos recién, esto implica sumar algunas de las potencias de 2. En este caso:

$$\begin{aligned} & 10000 = 2^4 = 16 \\ + \quad & 1000 = 2^3 = 8 \\ + \quad & 10 = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

O sea, el número $11010 = 26$ (= 16 + 8 + 2)

Otro ejemplo: el número 1010101 resulta de haber escrito en notación *binaria* el número

$$1000000 + 10000 + 100 + 1 =$$
$$(2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0) = 64 + 16 + 4 + 1 = 85$$

Creo que ahora, después de estos ejemplos, está en condiciones de, dado un número en notación binaria, poder determinar qué número en notación decimal representa.

Sólo con el afán de ayudarlo para que esté seguro de lo que está haciendo, agrego algunos ejemplos cuyas soluciones están más abajo.

Determine qué números en notación decimal están representados por los que siguen en notación *binaria*:

a) 11111
b) 10111
c) 100100

d) 101001
e) 100101001
f) 11111111110

Otra pregunta posible es si dado un número cualquiera, siempre se puede escribir en binario. Y si la respuesta es afirmativa, ¿cómo se hace? Es decir, lo mínimo que tendríamos que saber es cómo hacer para escribir cualquier número usando el sistema binario. Lo voy a hacer con algunos ejemplos, y estoy seguro de que después usted podrá deducir la forma *general* de hacerlo. Al menos, si yo estuviera en su lugar, lo *intentaría.* De hecho, antes de seguir leyendo, sería muy útil y mucho más interesante que trate de *descubrir* lo que hay que hacer por sus propios medios.

EJEMPLO 1

Tomemos el número 13. ¿Cómo hacer para *descubrir* su "escritura" en números binarios?

Una posible manera es empezar a dividirlo por 2 y anotar los restos de cada división. Al dividir 13 por el número 2, se obtiene un **6**, y *sobra 1.*

Es decir:

$$13 = \mathbf{6} \,.\, 2 + \boxed{\mathbf{1}} \quad (^{**})$$

Ahora, seguimos dividiendo el número que obtuvimos como *cociente.* O sea, el número 6. Al dividirlo por 2, se obtiene 3 y no sobra *nada.* O lo que es lo mismo, *sobra 0.*

Es decir:

$$6 = \mathbf{3} \,.\, 2 + \boxed{\mathbf{0}} \quad (^{***})$$

Ahora, dividimos otra vez *por 2* al *cociente* que obtuvimos, o sea, el número 3, y se tiene:

$$3 = \mathbf{1} \,.\, 2 + \boxed{\mathbf{1}} \quad (^{****})$$

Por último, dividimos otra vez *por 2* al *cociente* que obtuvimos, que es el número 1. Y se tiene:

$$1 = \mathbf{0} \,.\, 2 + \boxed{\mathbf{1}} \quad (^{*****})$$

Luego, desandando el camino, y recorriendo para atrás los *restos* que obtuvimos (los números que aparecen *recuadrados*), se tiene:

1101

Es decir: fui para atrás, marcando cada uno de los restos obtenidos, empezando del último hasta terminar en el primero. Así queda escrito un número en notación *binaria.*

Lo invito a comprobar que justamente ese número, el 1101, es el 13 que buscábamos.

EJEMPLO 2

¿Cómo escribir en notación *binaria* el número 513?

Una vez más, empiece a dividir por 2, anote los cocientes por un lado y los restos por otro. A los cocientes obtenidos los sigue dividiendo por 2, y vamos a utilizar los restos cuando recorramos para arriba la lista y descubramos el número que buscamos.

Las cuentas, entonces, son las siguientes:

$$\begin{array}{rcl}
513 & = & \mathbf{256} \,.\, 2 + \boxed{1} \\
256 & = & \mathbf{128} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
128 & = & \mathbf{64} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
64 & = & \mathbf{32} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
32 & = & \mathbf{16} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
16 & = & \mathbf{8} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
8 & = & \mathbf{4} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
4 & = & \mathbf{2} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
2 & = & \mathbf{1} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
1 & = & \mathbf{0} \,.\, 2 + \boxed{1}
\end{array}$$

Luego, el número que buscamos (la escritura binaria de 513) se obtiene recorriendo hacia arriba los restos que encontramos:

1000000001

Ejemplo 3

Encontremos la escritura en números *binarios* del número 173. (Elijo números relativamente chicos, para que las cuentas no sean tan largas.)

$$\begin{array}{rcl}
173 & = & \mathbf{86} \,.\, 2 + \boxed{1} \\
86 & = & \mathbf{43} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
43 & = & \mathbf{21} \,.\, 2 + \boxed{1} \\
21 & = & \mathbf{10} \,.\, 2 + \boxed{1} \\
10 & = & \mathbf{5} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
5 & = & \mathbf{2} \,.\, 2 + \boxed{1} \\
2 & = & \mathbf{1} \,.\, 2 + \boxed{0} \\
1 & = & \mathbf{0} \,.\, 2 + \boxed{1}
\end{array}$$

Una vez más, para encontrar lo que buscamos, recorremos los restos *de abajo hacia arriba* y construimos el siguiente número binario:

10101101

Ahora creo que está en condiciones de encontrar la escritura binaria de cualquier número. No sólo eso: está en condiciones de afirmar que *siempre* la va a encontrar usando este método. Por lo tanto, estamos en condiciones de decir que *todo* número escrito en forma decimal, admite una *única* escritura en notación binaria. Y viceversa: cualquier número escrito en notación binaria admite una única escritura en notación decimal. Esto permite concluir, entonces, que las computadoras pueden sentirse libres de usar los números binarios tanto como quieran. No encontrarán ninguna dificultad, salvo la longitud o, si ustedes prefieren, la tira de combinaciones de ceros y unos que hacen falta para escribir un número relativamente pequeño.

Una pregunta que uno debería hacerse a esta altura es por qué las computadoras están *restringidas* a usar sólo *ceros* y *unos*.

Las computadoras funcionan como si uno estuviera ante una *barrera* que sube o baja para dejar pasar un auto. Depende de si el tren está por venir o no. Si la barrera está baja, uno no puede pasar. Si está levantada, entonces sí. Esto corresponde a impulsos eléctricos. O bien la barrera está *baja,* en cuyo caso lo representamos con un *cero* (porque no se puede pasar), o bien la barrera está *levantada,* en cuyo caso lo representamos con un *uno*. Luego, como los circuitos de los que están armadas las computadoras o bien dejan pasar la electricidad o *no* la dejan pasar, eso se indica (a trazos gruesos, por supuesto) con combinaciones de *unos* y *ceros*.

SOLUCIÓN:

Las respuestas son:

a) 31
b) 23
c) 36
d) 41
e) 297
f) 2.046